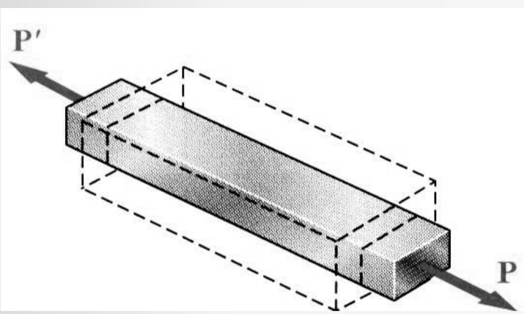
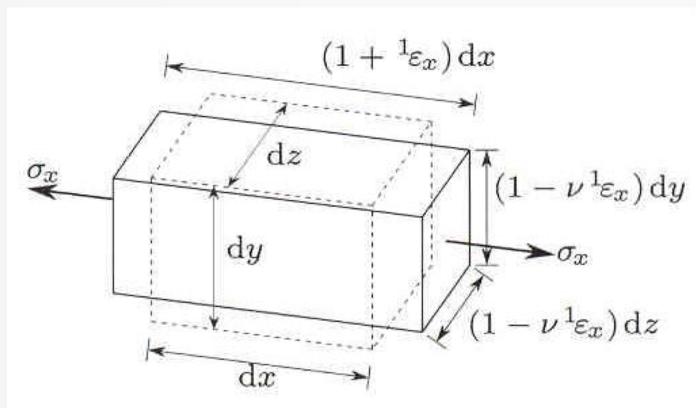
POLITÉCNICO DE LEIRIA
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO

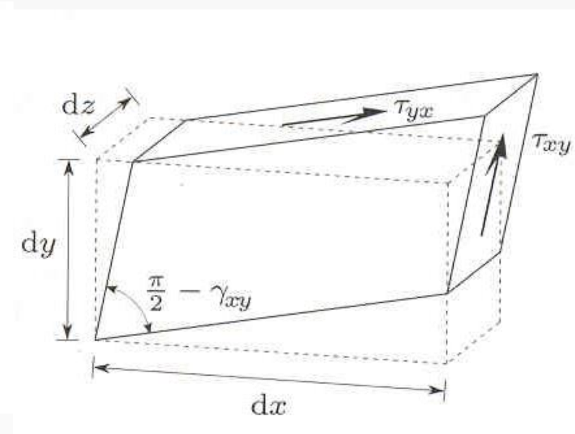
Resistência dos Materiais

Capítulo 2 Elasticidade Linear

- Lei de Hooke generalizada







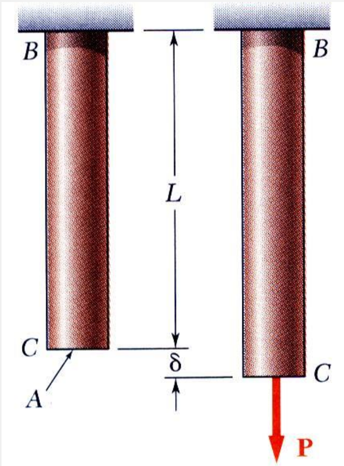
Acetatos baseados nos livros:
- Mechanics of Materials - Beer & Jonhson
- Mecânica e Resistência dos Materiais – V. Dias da Silva

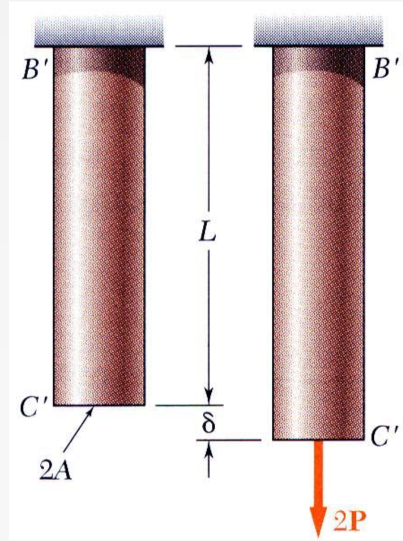
Fernando Batista - Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Leiria - 2019

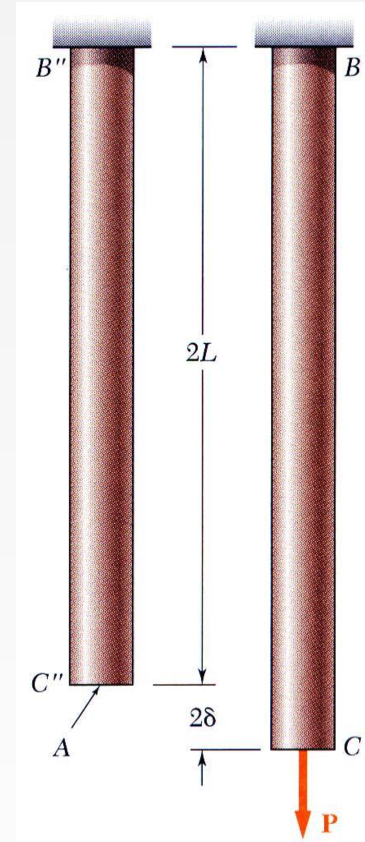
Índice

- Tensão e extensão – Tensão Normal - carregamento axial
- Ensaio de tração
- Diagrama de tensão - extensão: Materiais dúcteis
- Diagrama de tensão - extensão : Materiais frágeis
- Lei de Hooke: Módulo de Elasticidade
- Deformações de barras sujeitas a cargas axiais
- Problemas estatisticamente indeterminados
- Problemas que envolvem variação de temperatura
- Coeficiente de Poisson
- Lei de Hooke generalizada
- Dilatação volumétrica: Módulo de elasticidade de volume
- Tensão de corte
- Relação entre E, υ e G
- Concentração de tensões

Tensão e Extensão: Carregamento axial







$$\sigma = \frac{P}{A}$$ Tensão

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$ Extensão

$$\sigma = \frac{2P}{2A} = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{2\delta}{2L} = \frac{\delta}{L}$$

δ - Deslocamento

ε - Extensão (deformação)

Ensaio de Tração

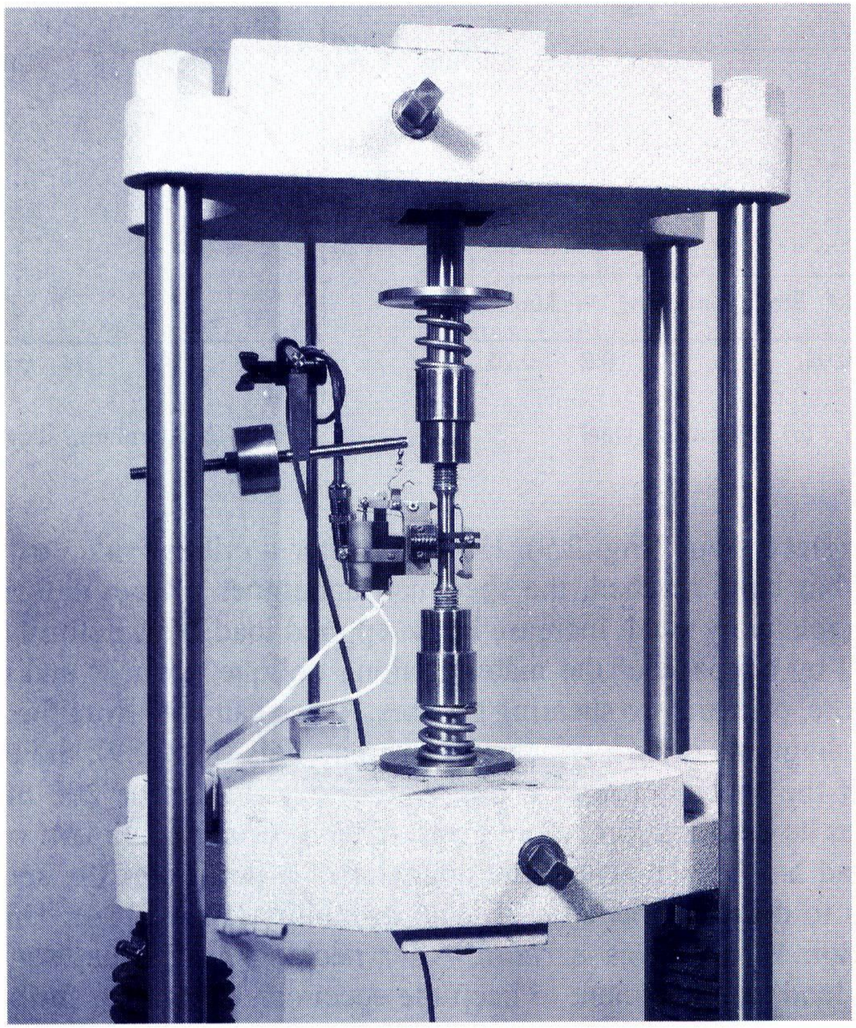


Fig. 2.7 This machine is used to test tensile test specimens, such as those shown in this chapter.

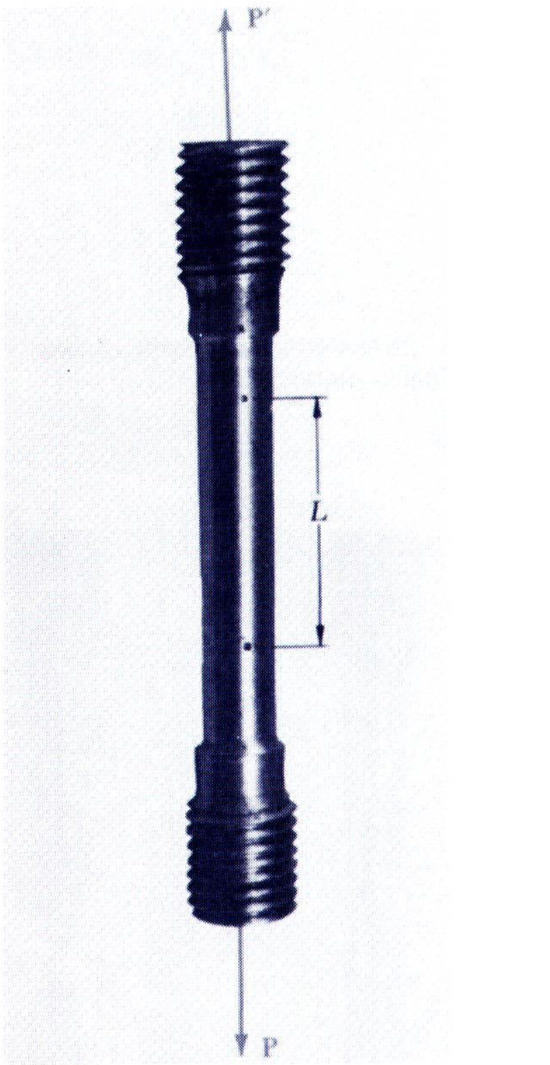
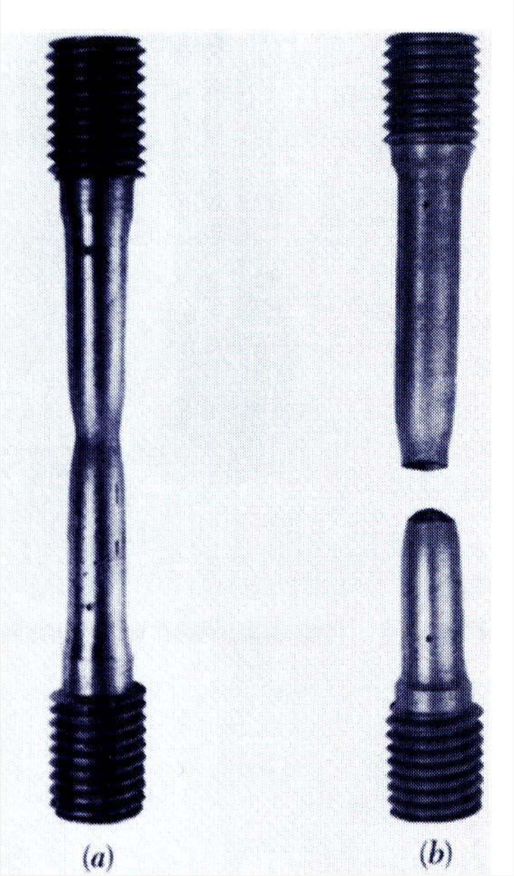
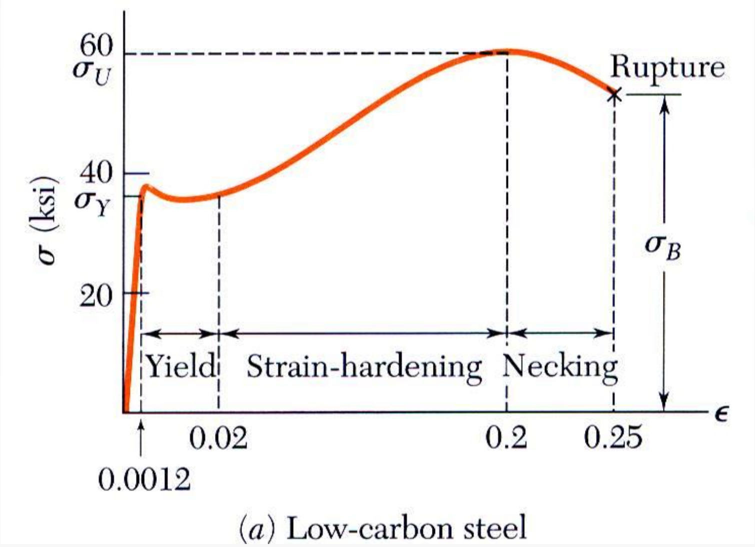


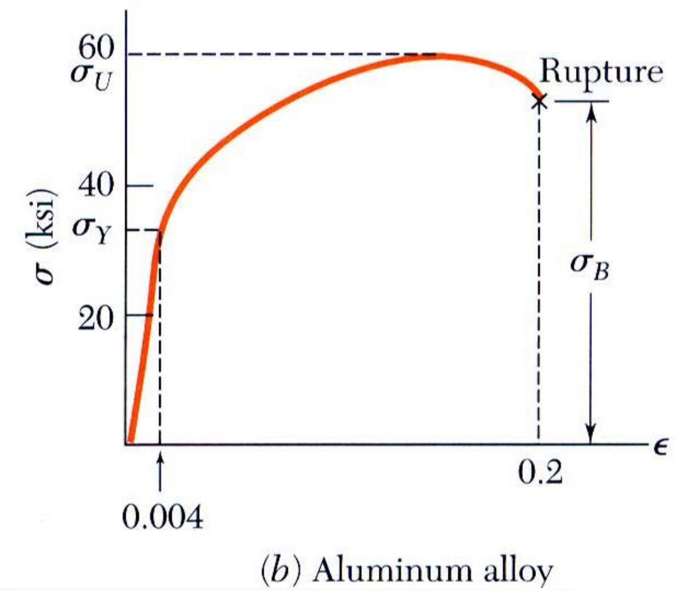
Fig. 2.8 Test specimen with tensile load.

Ensaio de Tração: Diagrama tensão - extensão

Materiais dúcteis

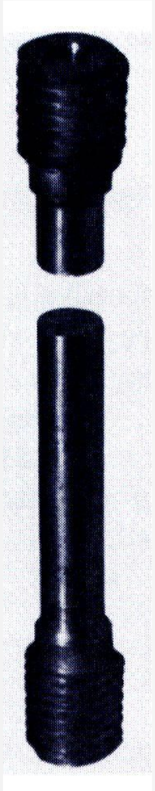


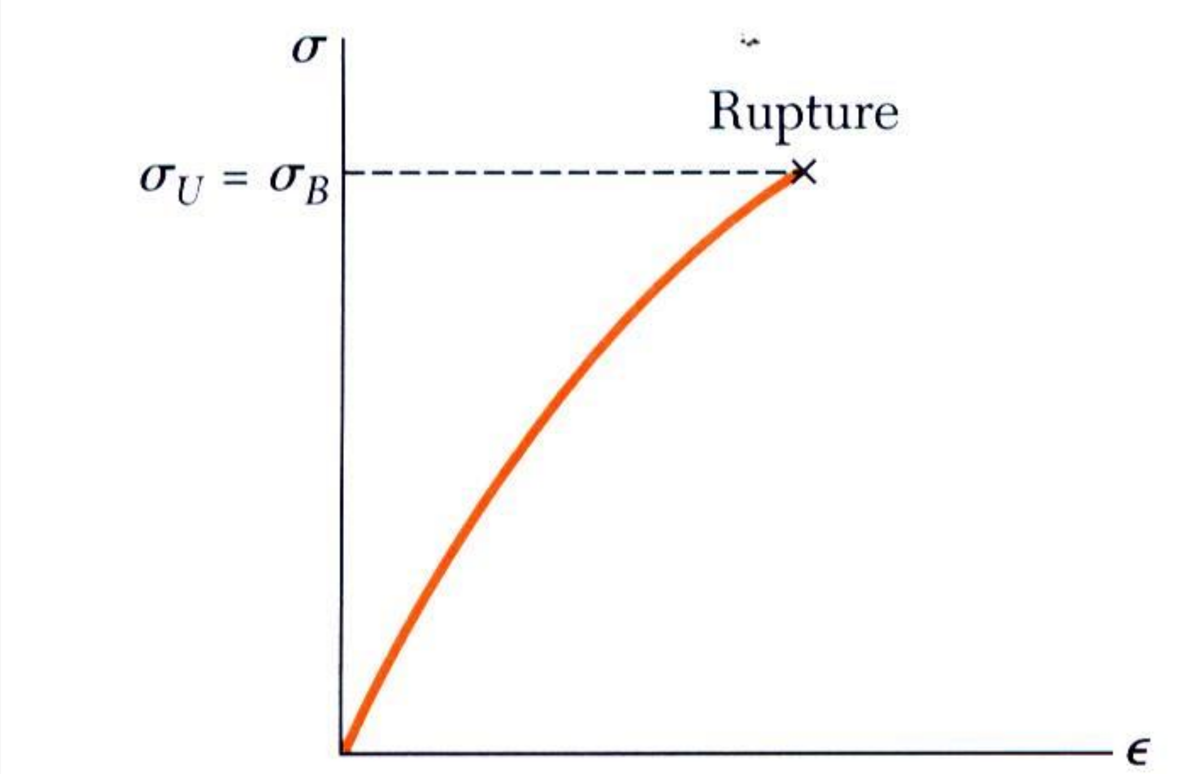




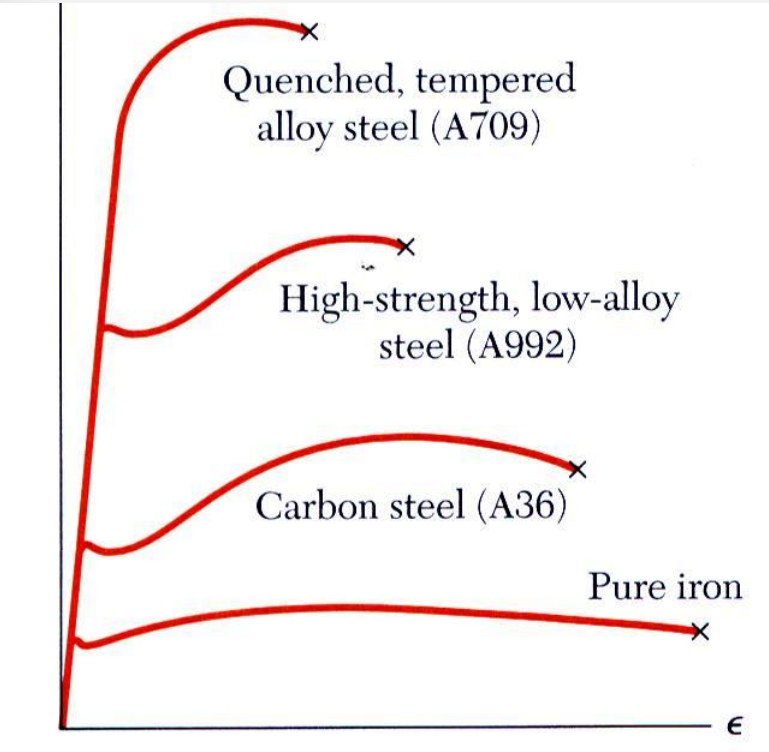
Ensaio de Tração: Diagrama tensão - extensão

Materiais Frágeis





Lei de Hooke : Módulo de Elasticidade



$$\boxed{\sigma = E\,\varepsilon}$$

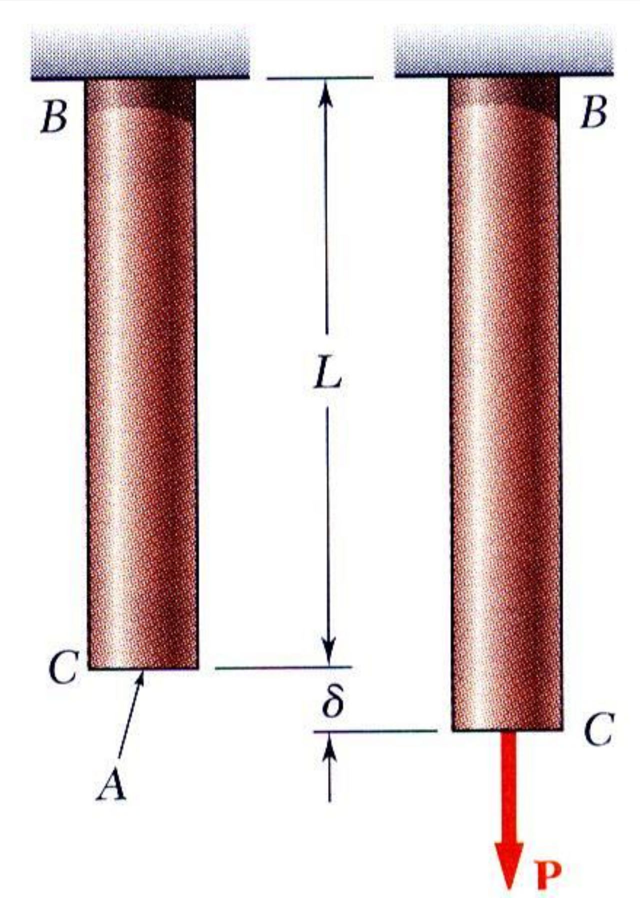
E - Módulo de Young ou Módulo de Elasticidade

Algumas propriedades físicas dos materiais (resistência, ductilidade) podem ser alteradas por tratamentos térmicos, presença de elementos de liga ou processos de fabrico. Contudo o seu Módulo de Elasticidade é o mesmo.

O valor máximo, para o qual o material ainda apresenta comportamento elástico, designa-se por **limite de elasticidade.**

Se a deformação desaparece quando é retirada a carga, então o material tem **comportamento elástico** caso contrario o material sofreu uma **deformação plástica.**

Deformações de barras sujeitas a cargas axiais



Da Lei de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \quad => \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

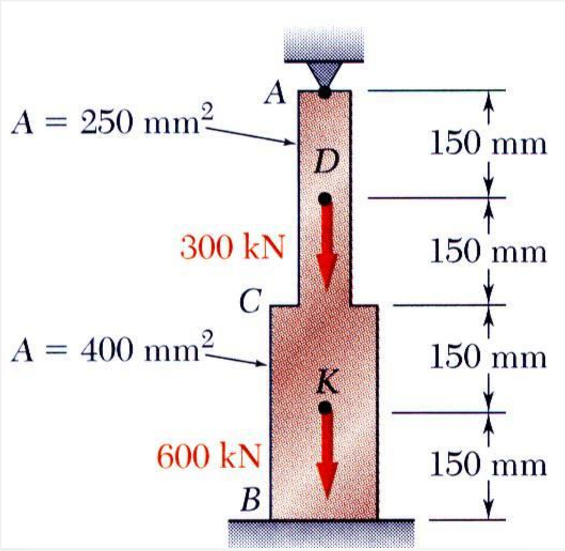
Da definição de extensão:

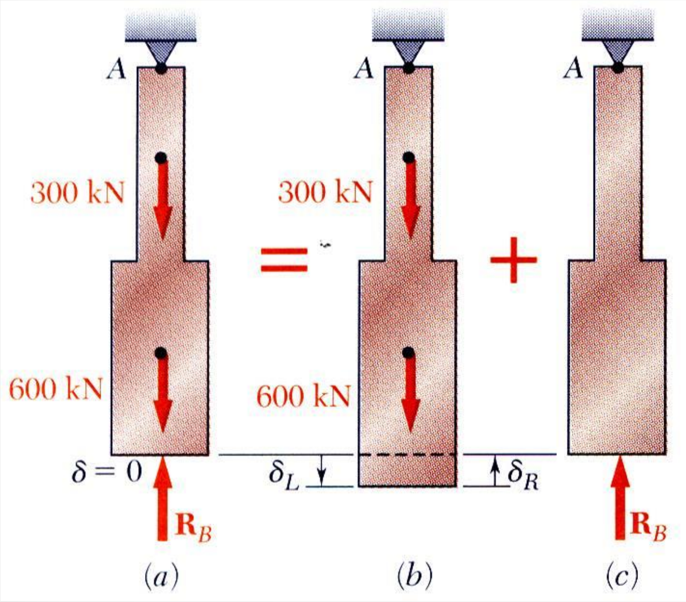
$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad => \quad \frac{\delta}{L} = \frac{P}{AE} \quad => \quad \boxed{\delta = \frac{PL}{AE}}$$

Se existir variação no carregamento, nas secções transversais e nos materiais,

$$\boxed{\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}}$$

Problemas estaticamente indeterminados





Problemas ***estaticamente indeterminados*** envolvem estruturas cujas reações e esforços internos não são determináveis apenas pela Estática.

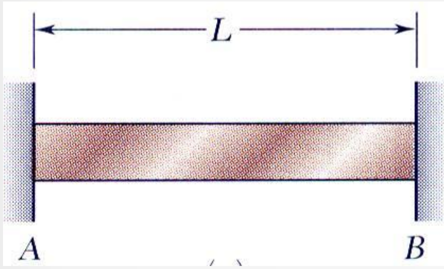
Uma estrutura pode ser estaticamente indeterminada se for suportada em mais apoios do que os necessários para manter o equilíbrio.

As reações redundantes devem ser consideradas forças desconhecidas, que juntamente com as outras cargas, devem originar deformações compatíveis.

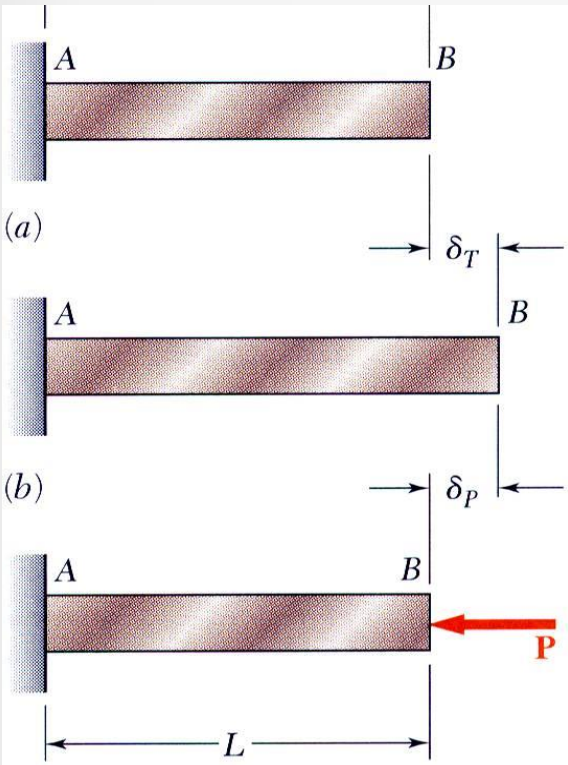
As deformações produzidas pelas cargas aplicadas e as redundantes são calculadas separadamente, e só posteriormente são somadas ou sobrepostas.

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$$

Carregamentos a temperatura variável



Variações de temperatura provocam alongamentos ou deformações térmicas. Não existem neste caso tensões relacionadas com a deformação, exceto se o alongamento não é restringido pelos apoios.



Deverá analisar-se separadamente as deformações provocadas pela variação de temperatura e aplicar o princípio da sobreposição.

$$\boxed{\delta_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L}$$

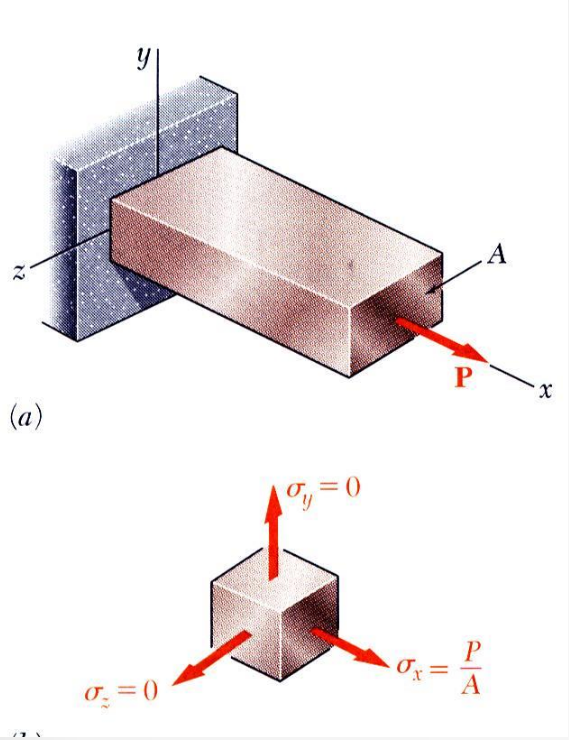
α – *Coeficiente de dilatação térmica*

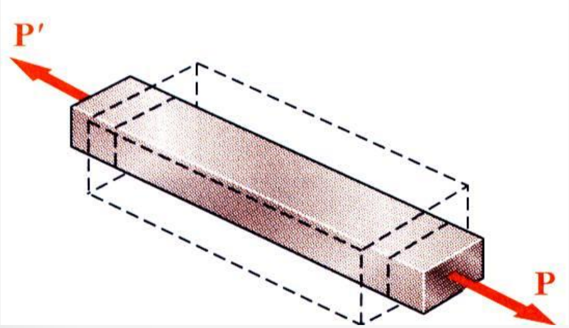
Como a deformação total deverá ser nula,

$$\delta = \delta_T + \delta_P = 0 \;\; => \;\; \alpha \cdot \Delta T \cdot L + \frac{PL}{AE} = 0$$

$$P = -AE\alpha \cdot \Delta T \qquad\qquad \frac{P}{A} = -E\alpha \cdot \Delta T$$

Coeficiente de Poisson





Uma barra solicitada a um carregamento axial,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

O alongamento na direção x é acompanhado por uma contração nas outras direções. Assumindo que o material é isotrópico (as propriedades não variam com a direção),

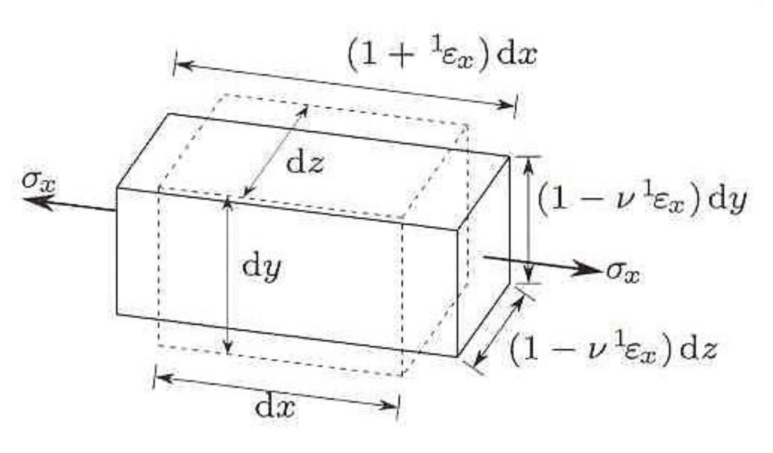
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0$$

O **Coeficiente de Poisson** é por definição:

$$\upsilon = \left|\frac{deformação\ transversal}{deformação\ axial}\right| = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

$$\boxed{\upsilon = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}}$$

Lei de Hooke generalizada



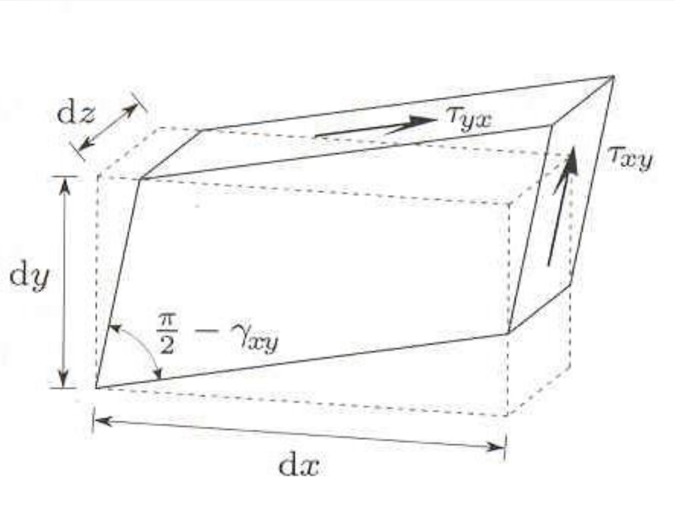
Materiais Isotrópicos

Para um cubo elementar sujeito a um carregamento multi-axial, a componente da tensão normal resultante pode ser determinado pelo **princípio da sobreposição**.

$$\sigma_x \rightarrow \begin{cases} {}^{1}\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} \\ {}^{1}\varepsilon_y = -\nu\ {}^{1}\varepsilon_x = -\dfrac{\upsilon}{E}\sigma_x \\ {}^{1}\varepsilon_z = -\nu\ {}^{1}\varepsilon_x = -\dfrac{\upsilon}{E}\sigma_x \end{cases} \qquad \sigma_y \rightarrow \begin{cases} {}^{2}\varepsilon_x = -\dfrac{\upsilon}{E}\sigma_y \\ {}^{2}\varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} \\ {}^{2}\varepsilon_z = -\dfrac{\upsilon}{E}\sigma_y \end{cases} \qquad \sigma_z \rightarrow \begin{cases} {}^{3}\varepsilon_x = -\dfrac{\upsilon}{E}\sigma_z \\ {}^{3}\varepsilon_y = -\dfrac{\upsilon}{E}\sigma_z \\ {}^{3}\varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \varepsilon_x = {}^{1}\varepsilon_x + {}^{2}\varepsilon_x + {}^{3}\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\upsilon}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = {}^{1}\varepsilon_y + {}^{2}\varepsilon_y + {}^{3}\varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = {}^{1}\varepsilon_z + {}^{2}\varepsilon_z + {}^{3}\varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \dfrac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}}$$

Lei de Hooke generalizada – Tensão de Corte



Um cubo elementar sujeito a tensões de corte deforma-se num paralelepípedo oblíquo.
A tensão de corte é definida com base no ângulo formado pelas faces sob tensão,

$$\boxed{\tau_{xy} = G\gamma_{xy}}$$

γ_{xy} - deformação angular no plano *xy*

G - Modulo de Elasticidade Transversal ou Modulo de distorção

$$\boxed{\begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G} \end{cases}}$$

O diagrama da tensão de corte vs. deformação angular é semelhante ao diagrama tensão normal vs. extensão normal, exceto que esses valores são metade dos obtidos para as tensões normais.

Lei de Hooke generalizada – Lei Constitutiva

A **lei constitutiva** de um **material isotrópico** de comportamento elástico linear fica completamente definida com estas duas expressões

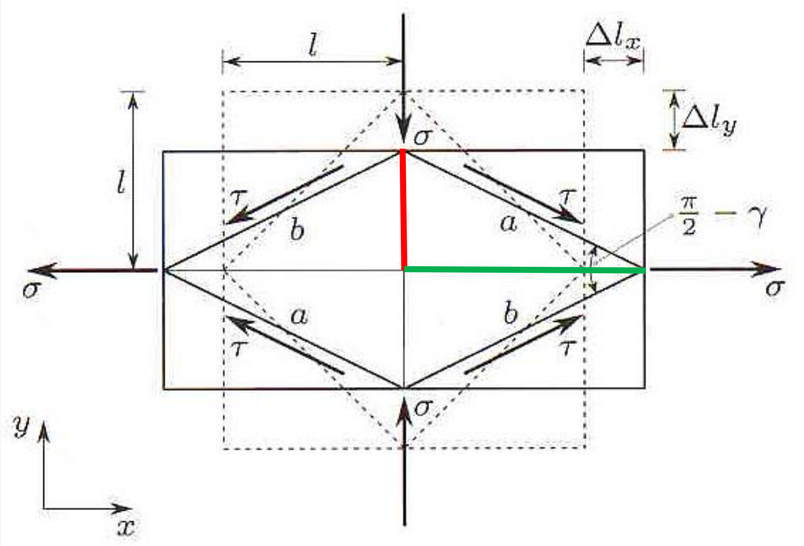
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\upsilon}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \dfrac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left[(1-\upsilon)\varepsilon_x + \upsilon\varepsilon_y + \upsilon\varepsilon_z\right] \\ \sigma_y = \dfrac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left[\upsilon\varepsilon_x + (1-\upsilon)\varepsilon_y + \upsilon\varepsilon_z\right] \\ \sigma_z = \dfrac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left[\upsilon\varepsilon_x + \upsilon\varepsilon_y + (1-\upsilon)\varepsilon_z\right] \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \end{cases}$$

Lei de Hooke generalizada – relação (E, ν, G)

Das três constantes elásticas (E, υ e G) apenas duas são independentes.



$$\sigma = \sigma_x = -\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \tau_{45^\circ} = \tau = \sigma$$

$$\begin{cases} \Delta l_y = l\varepsilon_y = l\dfrac{1}{E}(\sigma_y - \upsilon\sigma_x) = -l\dfrac{1+\upsilon}{E}\sigma \\ \Delta l_x = l\varepsilon_x = l\dfrac{1}{E}(\sigma_x - \upsilon\sigma_y) = l\dfrac{1+\upsilon}{E}\sigma \end{cases}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{tg\left(\frac{\pi}{4}\right) - tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{1 + tg\left(\frac{\pi}{4}\right) tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{l + \Delta l_y}{l + \Delta l_x} = \frac{l - l\dfrac{1+\upsilon}{E}\sigma}{l + l\dfrac{1+\upsilon}{E}\sigma}$$

Se considerarmos :

$$tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) \approx \frac{\gamma}{2}$$

e como $\sigma = \tau$

temos:

$$\frac{l - \frac{\gamma}{2}}{l + \frac{\gamma}{2}} = \frac{l - l\dfrac{1+\upsilon}{E}\tau}{l + l\dfrac{1+\upsilon}{E}\tau}$$

podemos identificar:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{1+\upsilon}{E}\tau$$

como:

$$\tau = G\gamma$$

temos:

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}}$$

Constante de Lamé λ

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\upsilon}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \dfrac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}[(1-\upsilon)\varepsilon_x + \upsilon\varepsilon_y + \upsilon\varepsilon_z] \\ \sigma_y = \dfrac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}[\upsilon\varepsilon_x + (1-\upsilon)\varepsilon_y + \upsilon\varepsilon_z] \\ \sigma_z = \dfrac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}[\upsilon\varepsilon_x + \upsilon\varepsilon_y + (1-\upsilon)\varepsilon_z] \end{cases}$$

Definindo mais duas constantes θ e λ podemos reescrever a lei constitutiva.

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_x + \varepsilon_x$$

$$\theta = \sigma_x + \sigma_x + \sigma_x$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \qquad \Downarrow \qquad G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

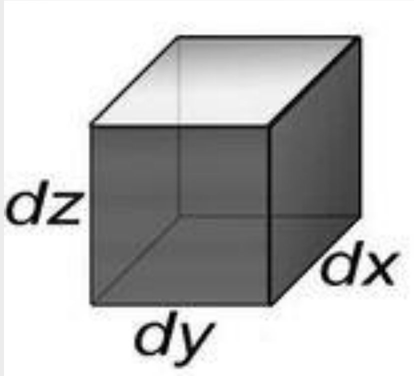
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_x - \nu\theta] \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_y - \nu\theta] \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_z - \nu\theta] \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x \\ \sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y \\ \sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z \end{cases}}$$

Destas expressões conclui-se se $\boxed{\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z}$ ter-se-á $\boxed{\varepsilon_x > \varepsilon_y > \varepsilon_z}$

Dilatação volumétrica ou Extensão volumétrica *e*

Define-se Dilatação volumétrica ou Extensão volumétrica (e) como a variação de volume por unidade de volume inicial. Considera-se um volume de um paralelepípedo retangular definido pelas distâncias infinitesimais dx, dy, dz



Volume Inicial : $V_0 = dx\,dy\,dz$

Volume Final : $V = (dx + \delta x)(dy + \delta y)\,(dz + \delta z)$

$$V = (dx + \varepsilon_x dx)(dy + \varepsilon_y dy)\,(dz + \varepsilon_z dz)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{dx} \qquad V = (1 + \varepsilon_x)dx\,(1 + \varepsilon_y)\,dy\,(1 + \varepsilon_z)\,dz$$

$$V = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)V_0$$

Atendendo a que as extensões longitudinais são infinitesimais os produtos destas extensões são infinitésimos de ordem superior, pelo que podem desprezar-se:

$$e = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \cancelto{0}{\varepsilon_x\varepsilon_y} + \cancelto{0}{\varepsilon_x\varepsilon_z} + \cancelto{0}{\varepsilon_y\varepsilon_z} + \cancelto{0}{\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z}$$

$$\boxed{e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}$$

Módulo de elasticidade de volume K

$$\left.\begin{aligned} e &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ \sigma_m &= \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \end{aligned}\right\} \quad e = \frac{3(1-2\upsilon)}{E}\sigma_m = \frac{\sigma_m}{K}$$

K é a constante de proporcionalidade entre a tensão normal média σ_m e a extensão volumétrica e e designa-se por **Módulo de elasticidade de volume ou módulo de compressibilidade cúbica do material**.

$$\sigma_m = Ke$$

$$\boxed{K = \frac{E}{3(1-2\upsilon)}}$$

Valores limites do coeficiente de Poisson

As quantidades E, G, e K têm que tomar valores positivos, pois para que o trabalho realizado por uma força seja positivo, é necessário que o seu ponto de aplicação se desloque no sentido dessa força.

$$\sigma = \mathrm{E}\varepsilon \qquad G = \frac{E}{2(1+\upsilon)} \qquad K = \frac{E}{3(1-2\upsilon)}$$

$$\begin{cases} G > 0 \;\Rightarrow\; 1+\upsilon > 0 \;\Rightarrow\; \nu < 1 \\ K > 0 \;\Rightarrow\; 1-2\upsilon > 0 \;\Rightarrow\; \upsilon < 0{,}5 \end{cases} \;\Rightarrow\; -1 < \upsilon < 0{,}5$$

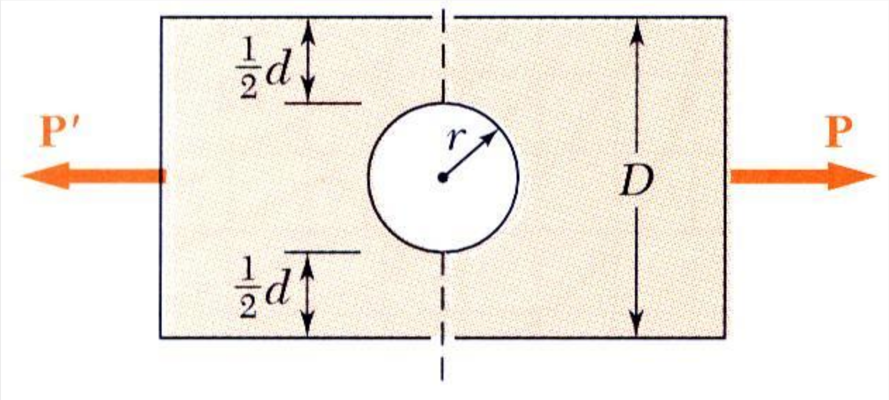
Este coeficiente toma valores positivos, pelo que habitualmente se considera,

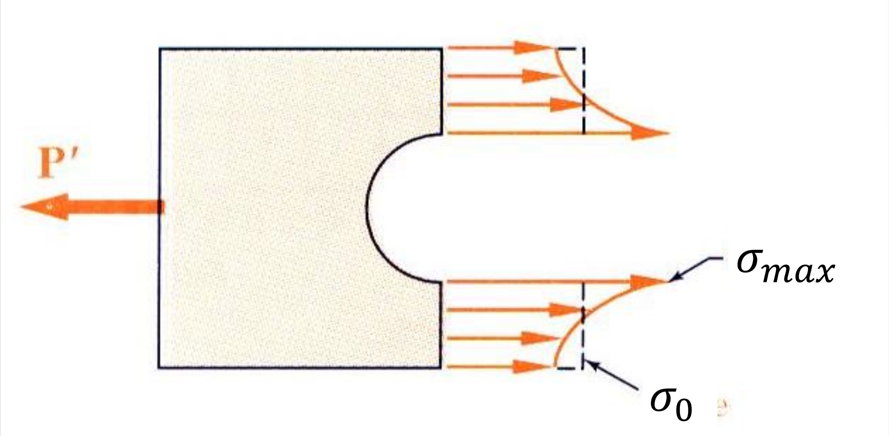
$$\boxed{0 \le \upsilon < 0{,}5}$$

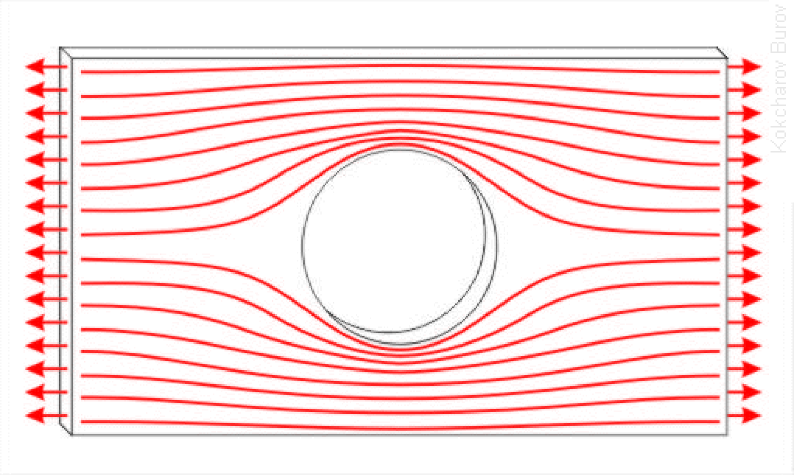
O valor máximo $\upsilon = 0{,}5$ corresponde a um material incompressível, pois conduz a um módulo de compressibilidade cúbica infinito,

$$\boxed{1 - 2\upsilon = 0 \;=>\; K = \infty}$$

Fator de concentração de tensões estático axial - K_{ta}







K_t varia com :

- O tipo de carga aplicada
- A geometria da peça

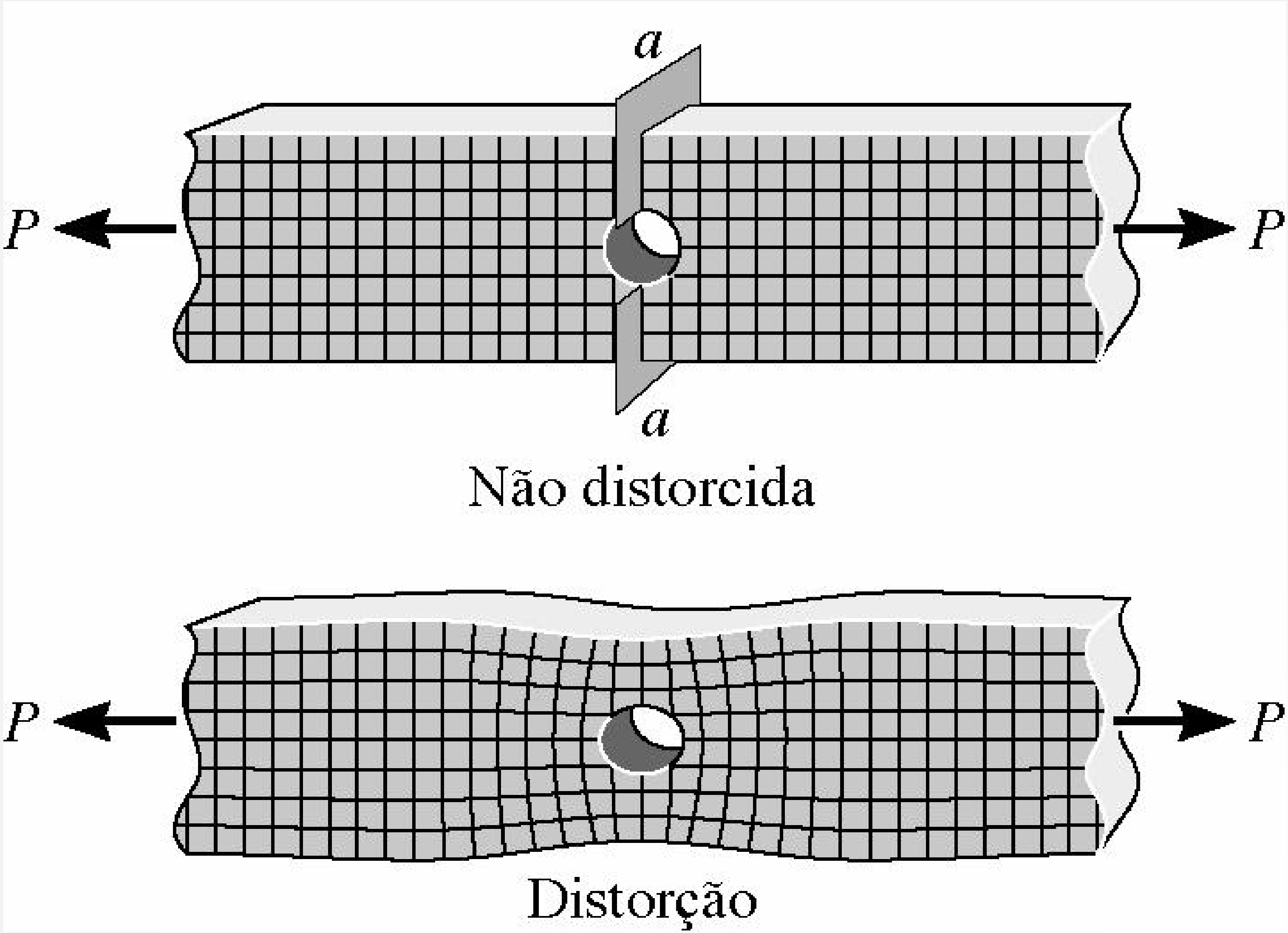
K_t é independente do material da peça

Descontinuidades, como furos ou variação brusca de secção, podem ocorrer altos valores de tensão nesses pontos de descontinuidade,

$$\boxed{K_{ta} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0}}$$

K_{ta} - fator de concentração estático axial

Concentração de tensões K_t - Plata com um furo



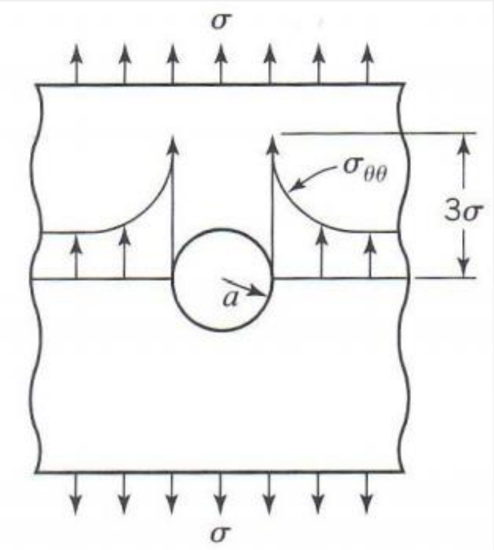
Concentração de tensões K_t - Plata com um furo

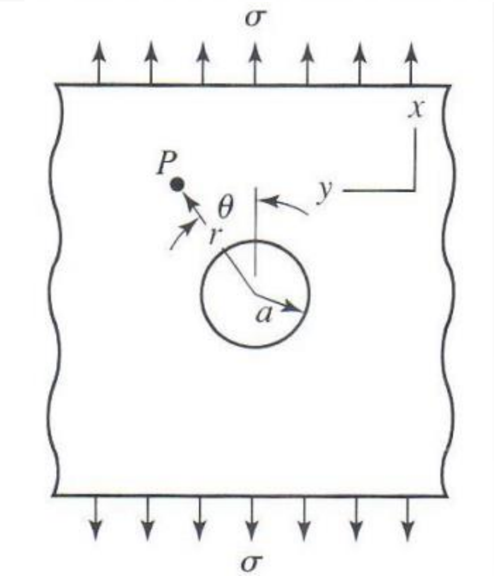
Solução analítica para o calculo das tensões

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{\sigma}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{3a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{\sigma}{2}\left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

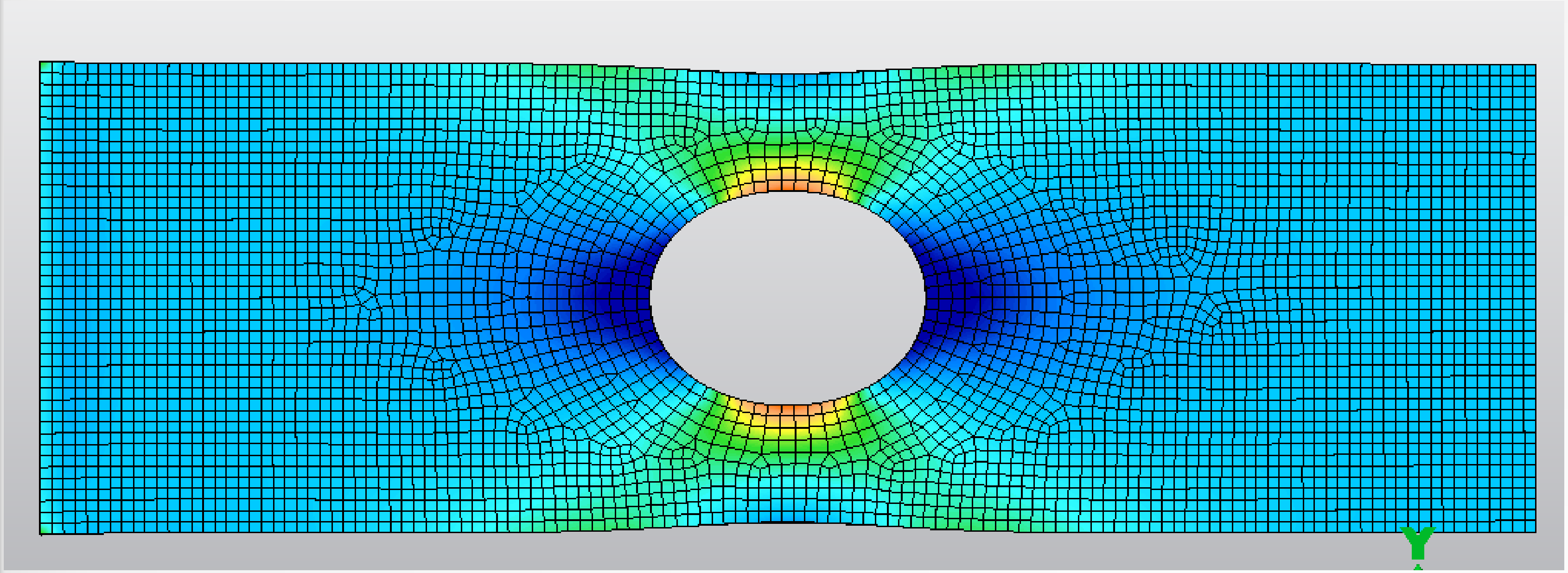
$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left(1+\frac{3a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta$$



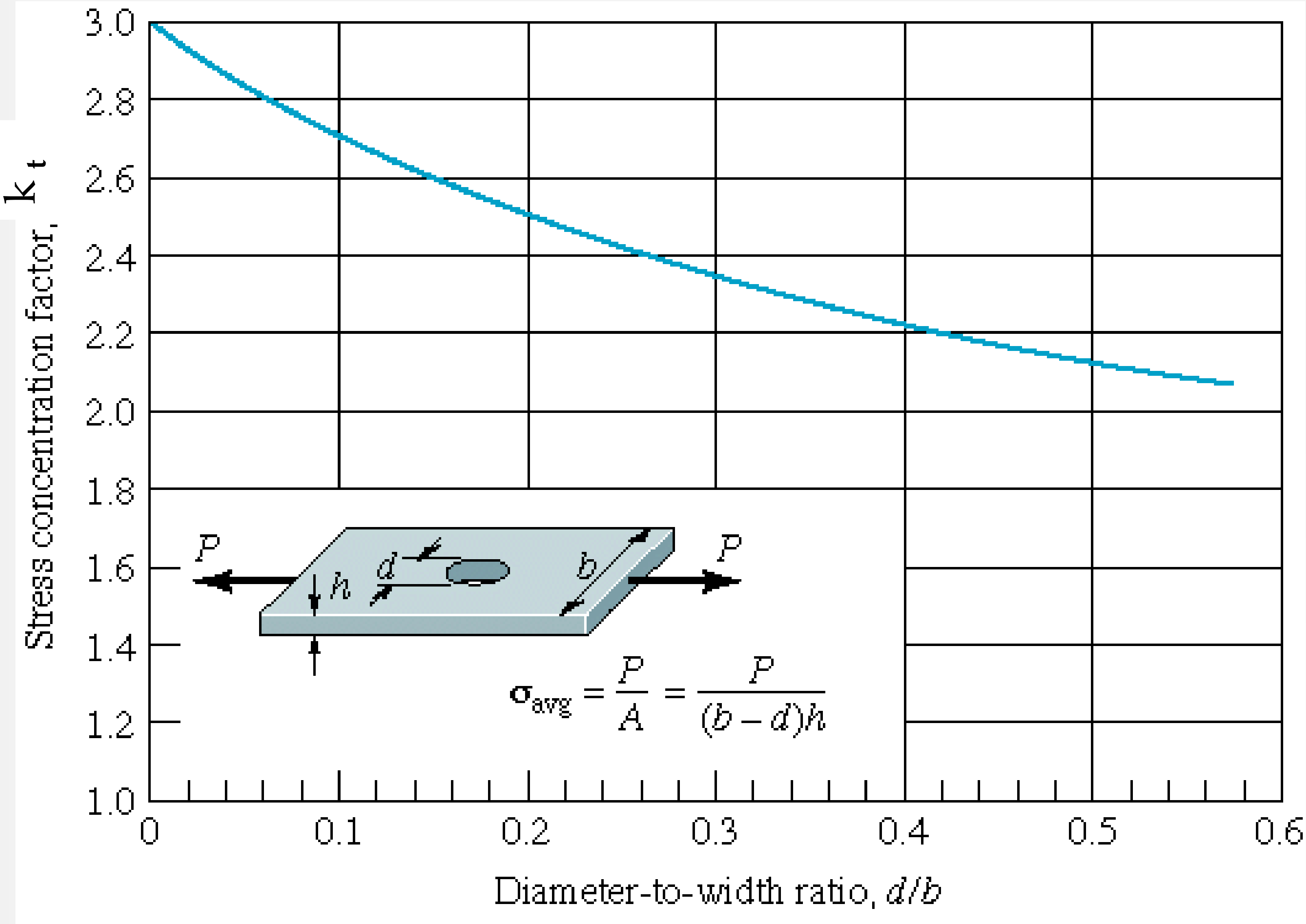


Concentração de tensões K_t - Plata com um furo

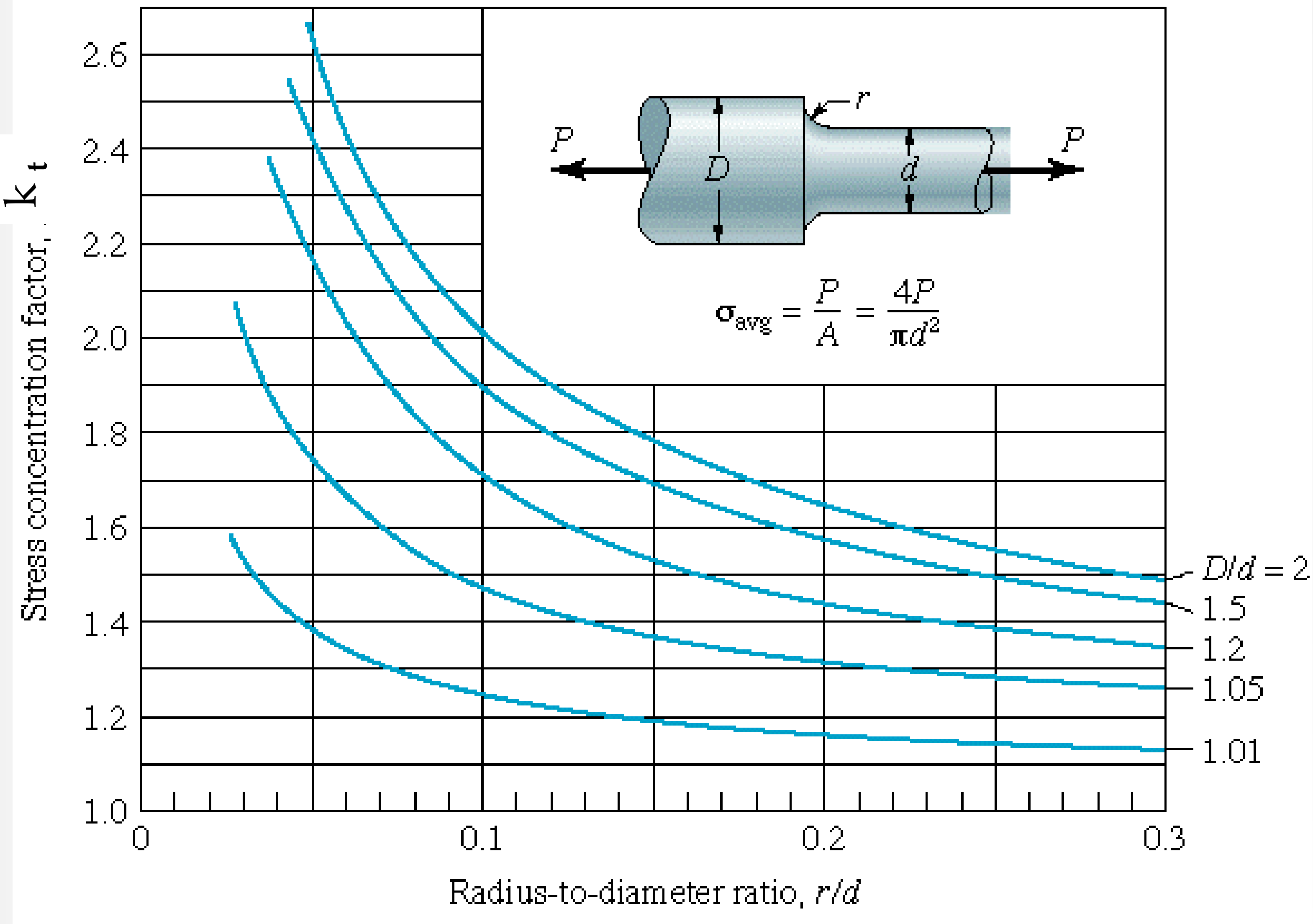
Resultados obtidos por métodos numéricos aproximados



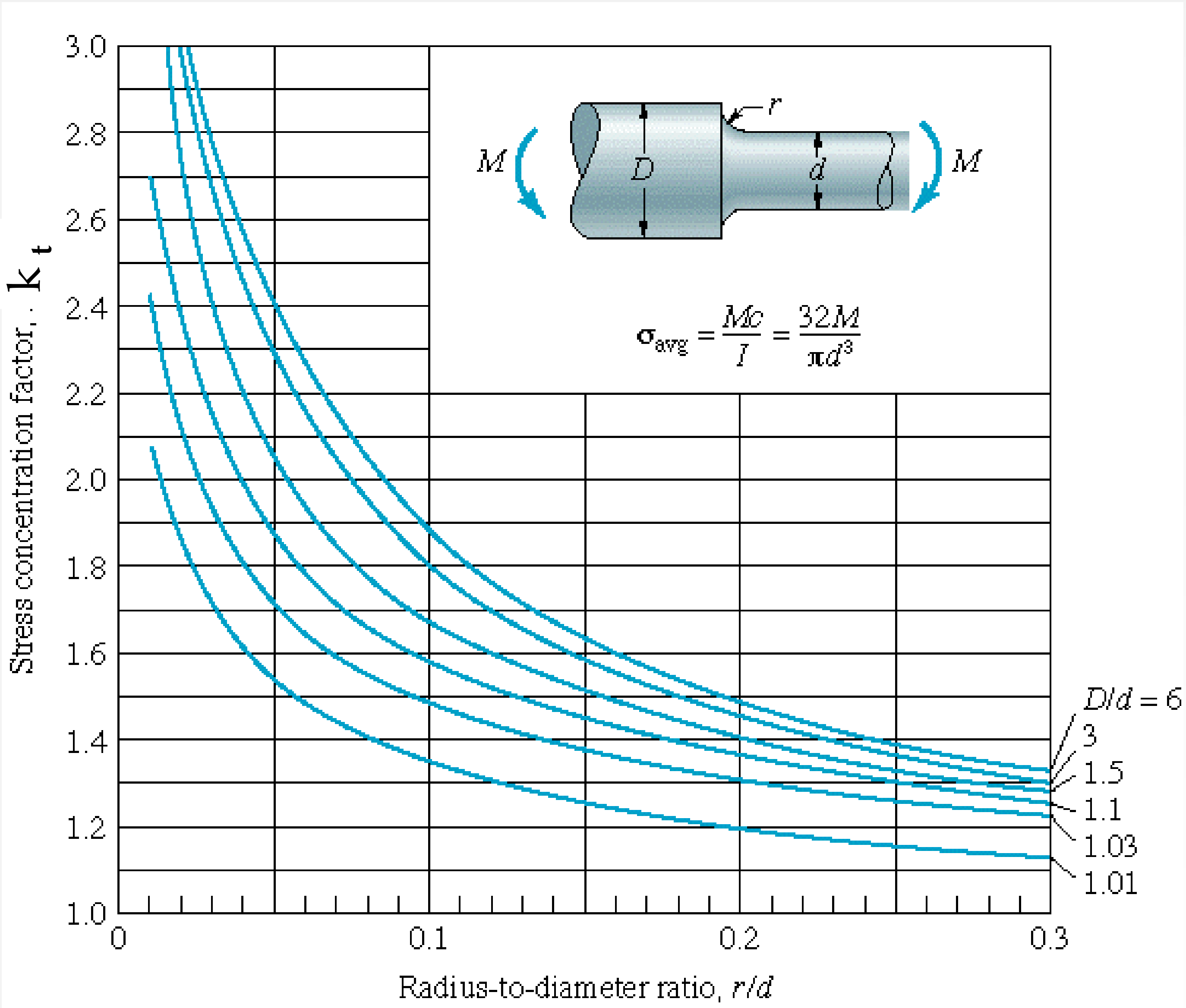
Concentração de tensões K_t



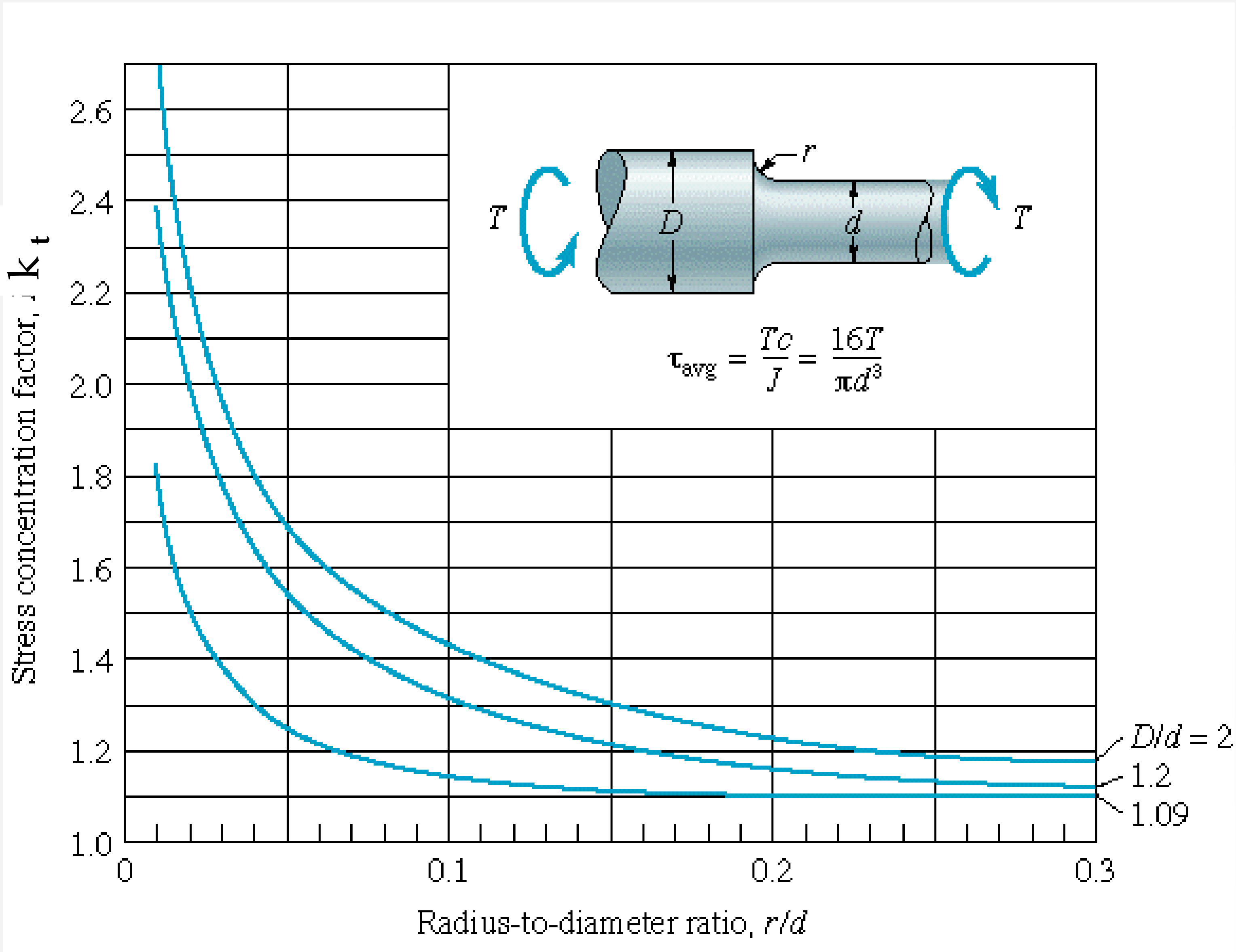
Concentração de tensões K_t



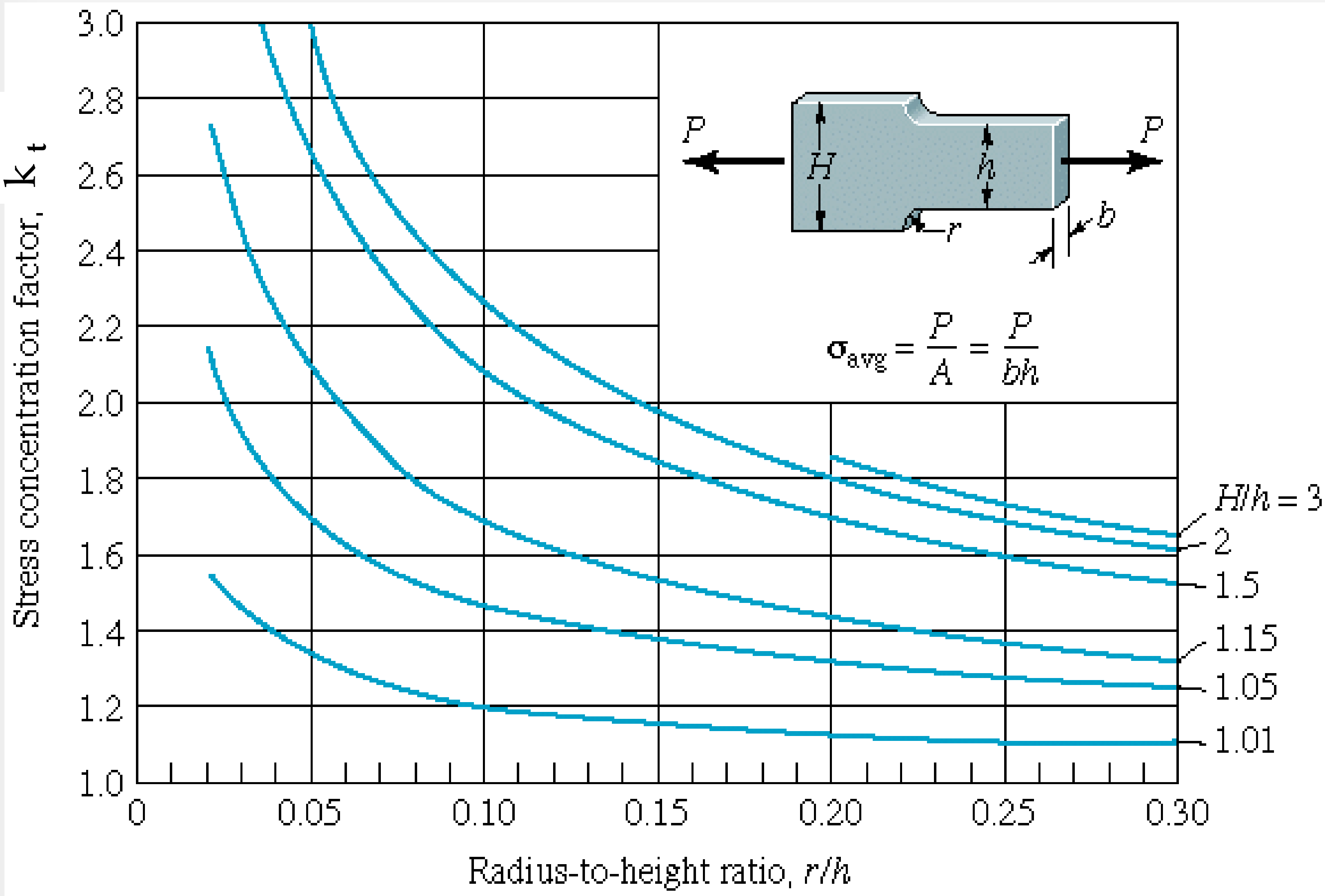
Concentração de tensões K_t



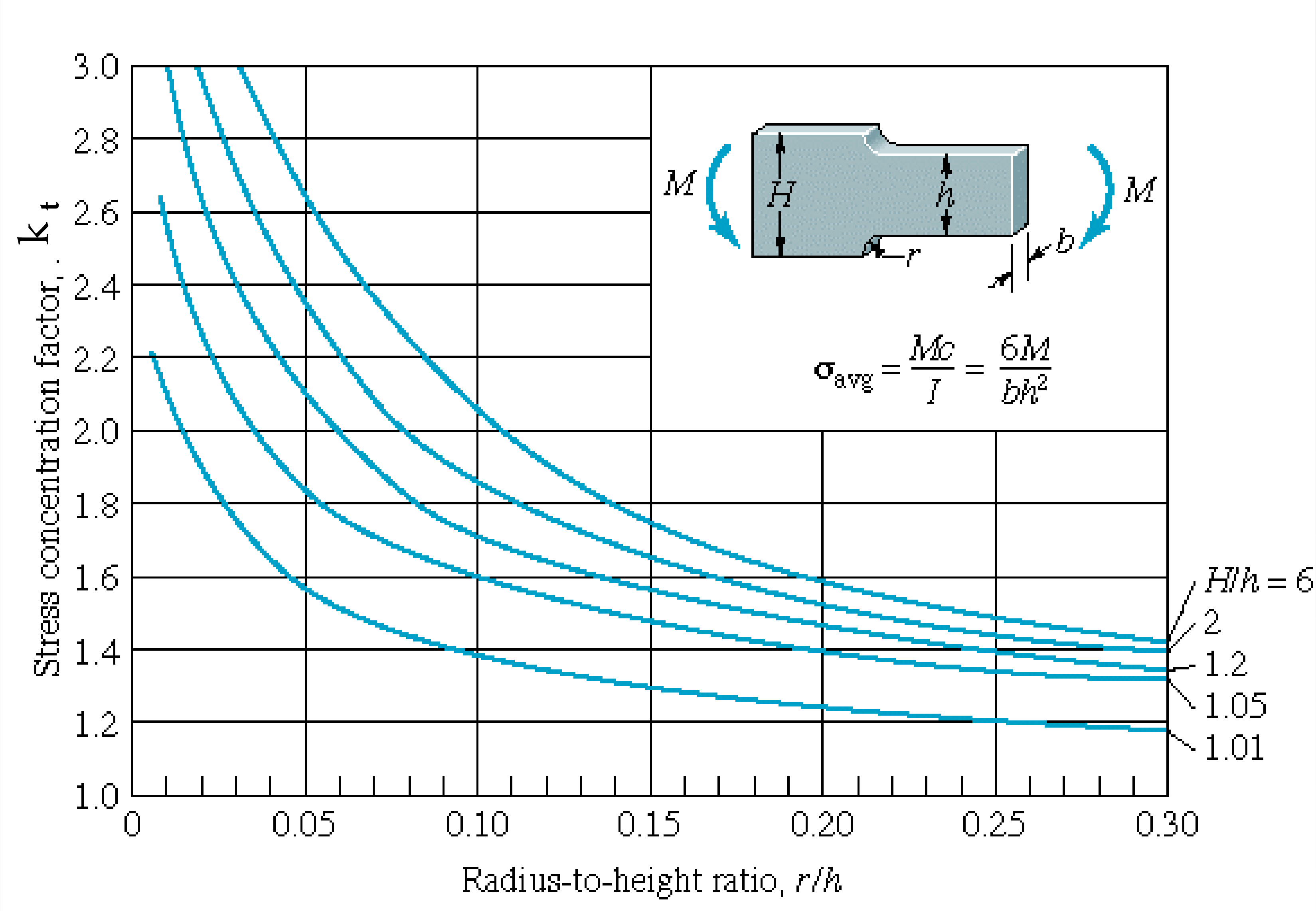
Concentração de tensões K_t



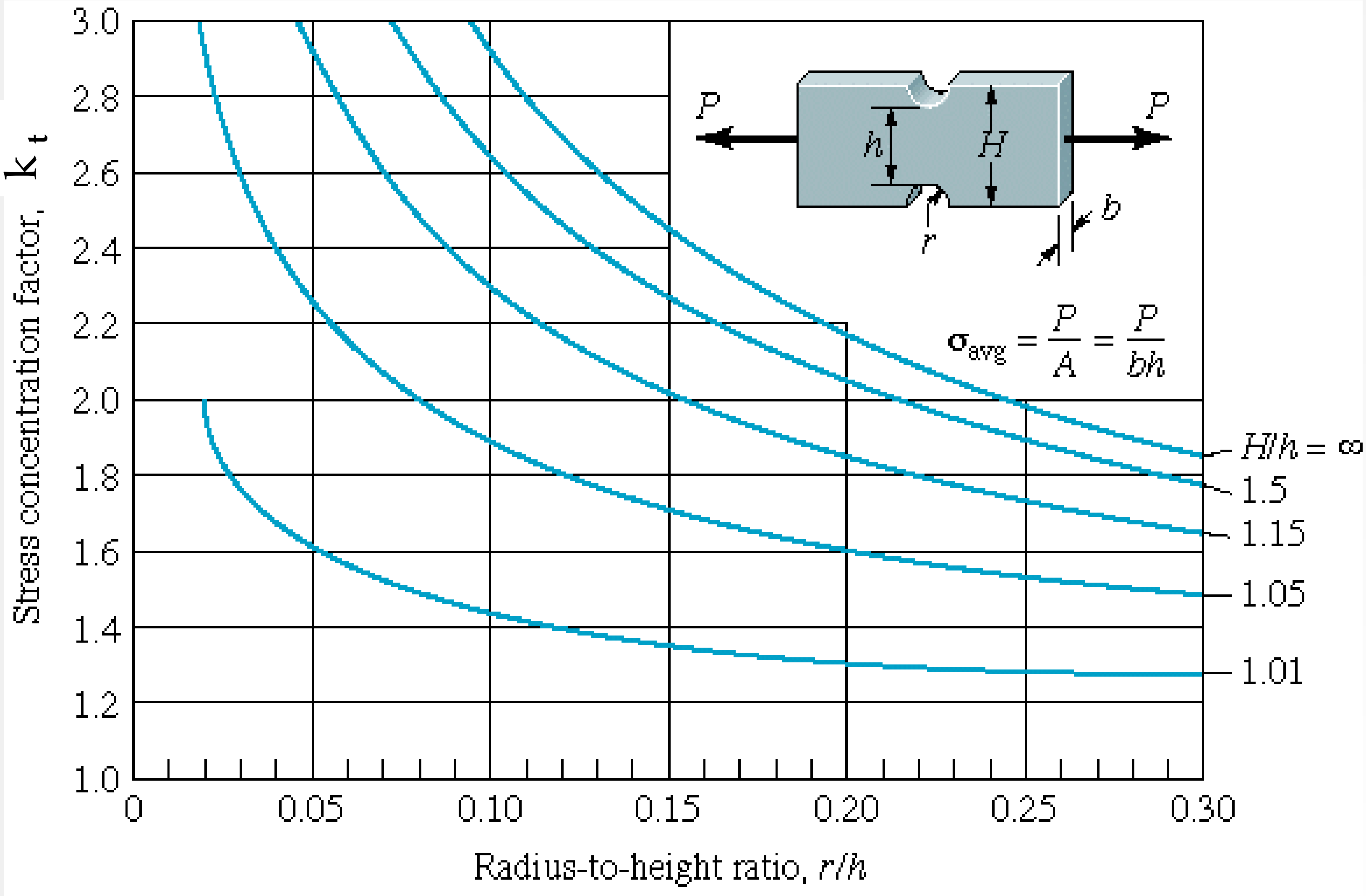
Concentração de tensões K_t



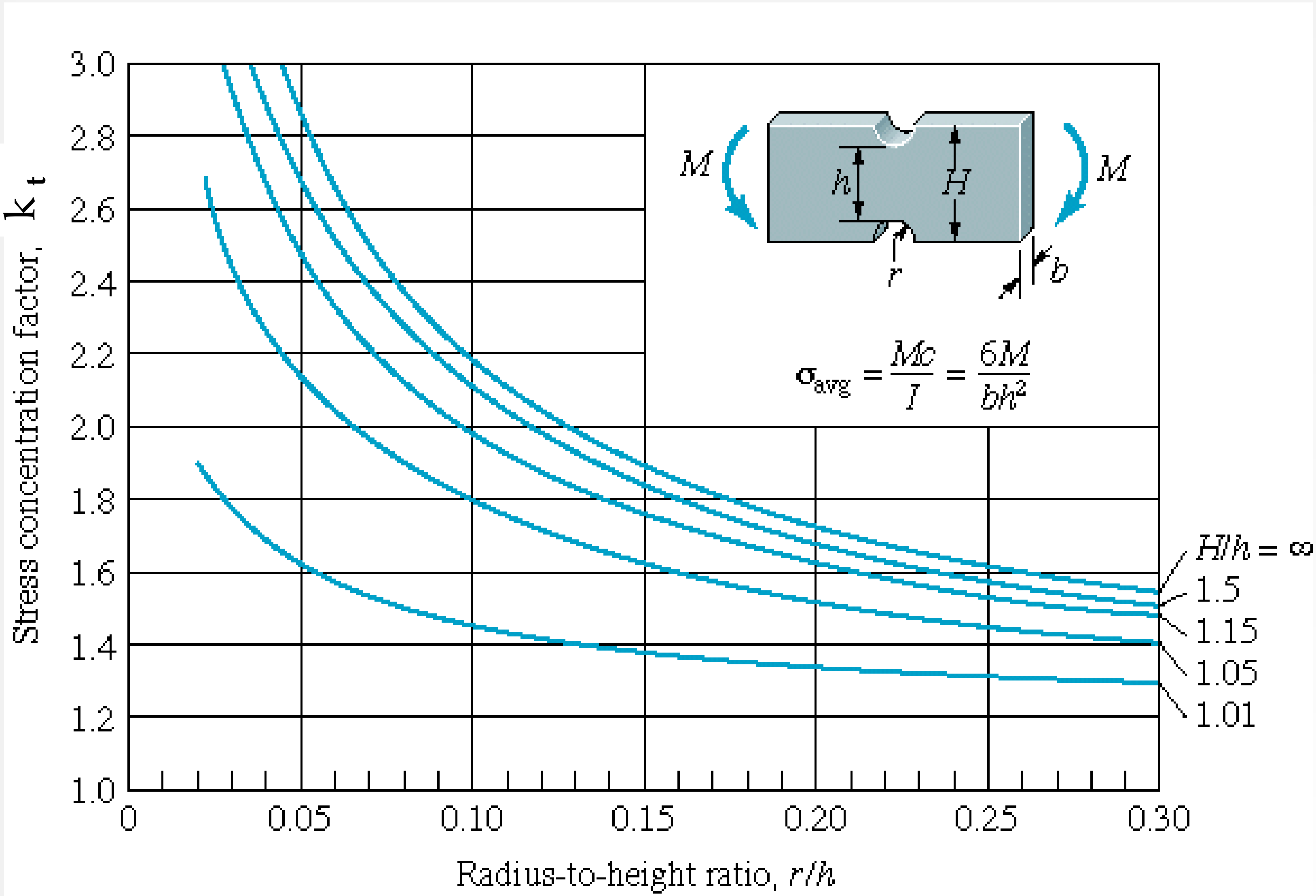
Concentração de tensões K_t



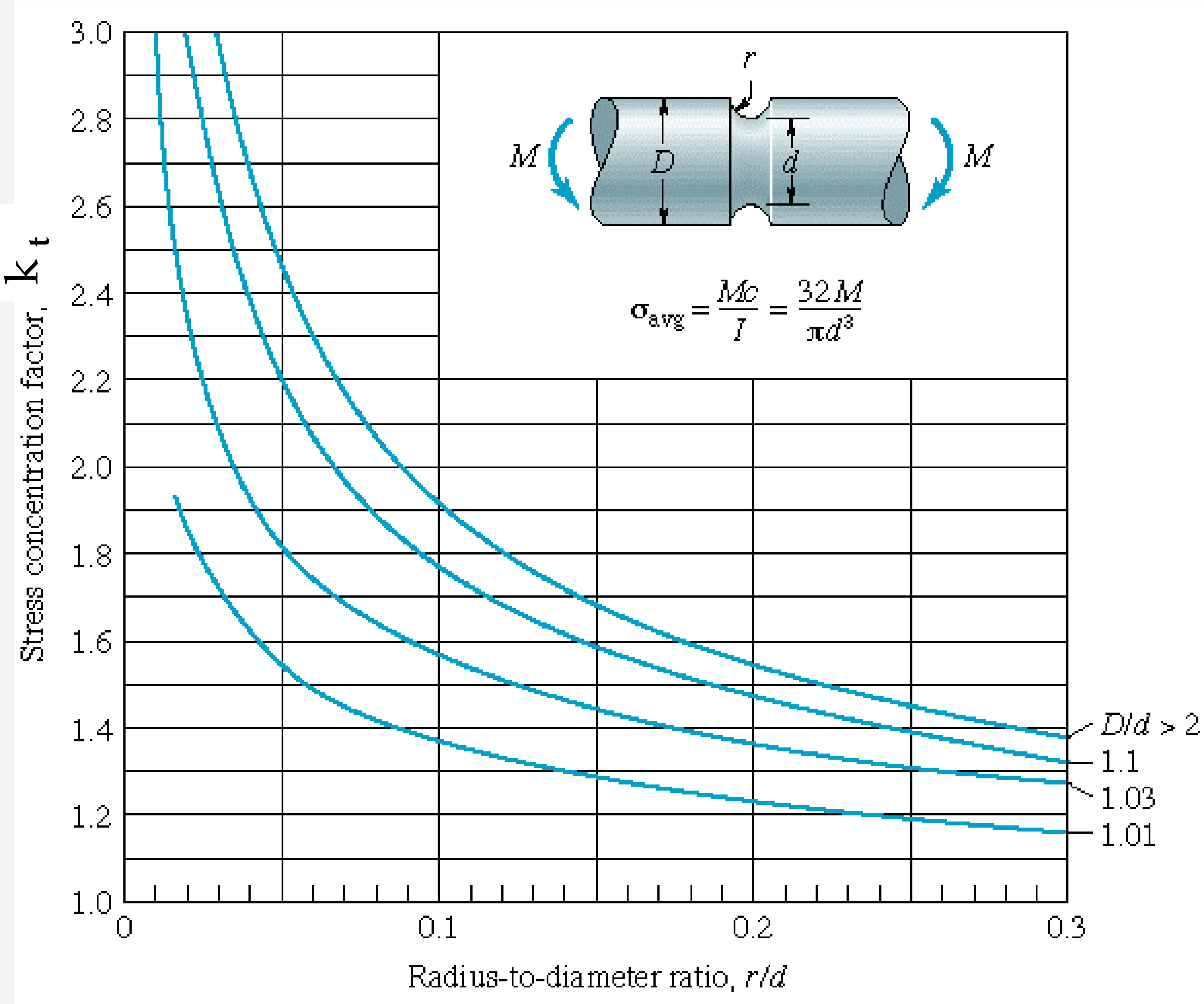
Concentração de tensões K_t



Concentração de tensões K_t



Concentração de tensões K_t



Concentração de tensões K_t