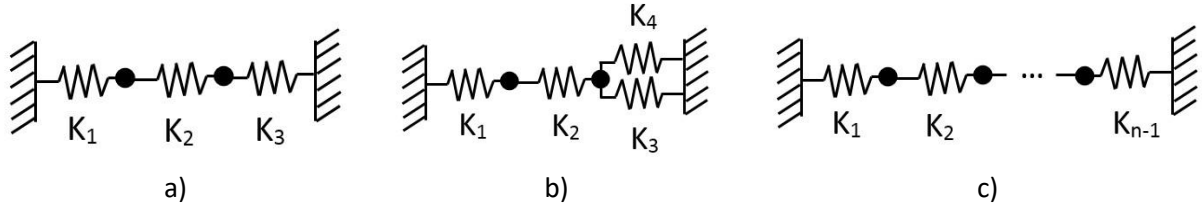
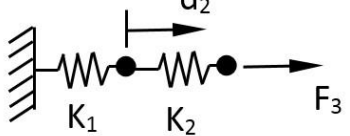
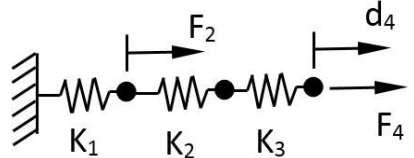
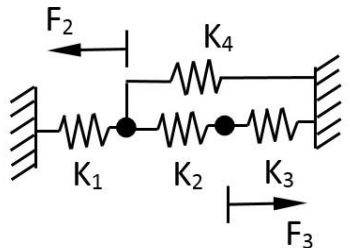
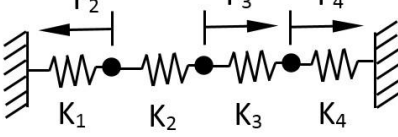
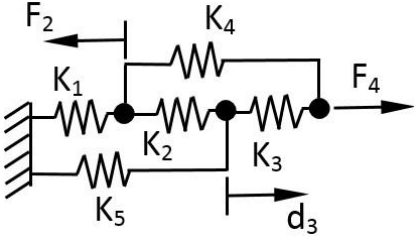


1. Molas e barras - Elementos Finitos com 2 graus de liberdade.

1.1. Determine os sistemas de equações das molas seguintes.

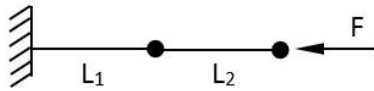
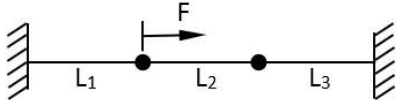
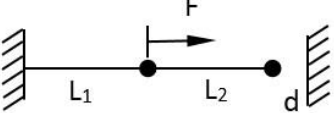


1.2. Responda aos pedidos dos sistemas de molas seguintes

<p>a)</p> 	<p>Dados: $K_1=K$; $K_2=K/2$ Conhecido: K e d_2</p>	<p>Pedido: F_3</p>
<p>b)</p> 	<p>Dados: $K_1=K_3=5\text{N/mm}$; $K_2=7\text{N/mm}$; $d_4=25\text{mm}$; A força do elemento 2 é nula</p>	<p>Pedido: F_2, F_4, d_2 e F_1</p>
<p>c)</p> 	<p>Dados: $K_2=K_4=2K_1=2K_3=2K$, $K=3,5\text{N/mm}$ $F_2=90\text{N}$; $F_3=67\text{N}$</p>	<p>Pedido: - Sistemas de equações - Deslocamento dos nós - Força em cada mola</p>
<p>d)</p> 	<p>Dados: $K_1=K_2=K_3=K_4=10\text{N/mm}$ $F_2=20\text{N}$; $F_3=25\text{N}$; $F_4=40\text{N}$</p>	<p>Pedido: - U_2, U_3 e U_4 - Reações - Forças nas molas</p>
<p>e)</p> 	<p>Dados: $K_1=K_2=K_3=K_4=K_5=10\text{N/mm}$ $d_3=20\text{mm}$; $F_2=50\text{N}$</p>	<p>Pedido: - Sistemas de equações - d_3, d_4, F_4 - Reações</p>

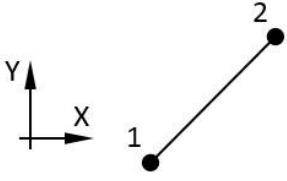
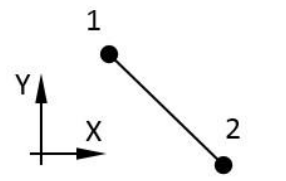
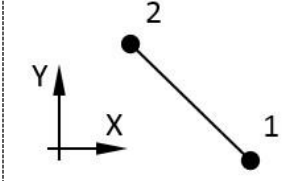
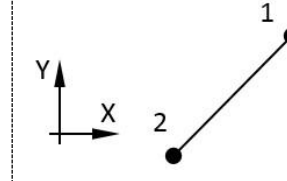
1.3. Utilize o 1º Teorema de Castigliano para determinar o sistema de equações do sistema das duas alíneas anteriores.

1.4. Responda aos pedidos das estruturas de barras seguintes (EB2GL).

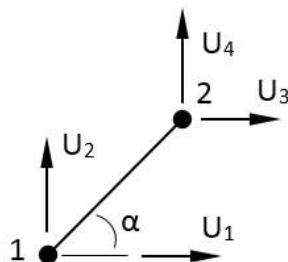
- a)  Dados: $L_1 = L_2 = 0,5\text{m}$; $A = 500\text{mm}^2$; $E = 207\text{GPa}$; $F = 12\text{kN}$ Pedido: - Tensões normais nas barras
- b)  Dados: $L_1 = L_2 = L_3 = 0,3\text{m}$; $A_1 = A_2 = 200\text{mm}^2$; $A_3 = 400\text{mm}^2$; $E = 210\text{GPa}$; $F = 10\text{kN}$ Pedido: - Tensões normais nas barras
- Deslocamento dos nós
- c)  Dados: $d = 2\text{mm}$; $E_1 = 20\text{GPa}$; $E_2 = 10\text{GPa}$; $\alpha_1 = 12 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$; $\alpha_2 = 21 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$; $L_1 = 400\text{mm}$; $L_2 = 300\text{mm}$; $A_1 = 450\text{mm}^2$; $A_2 = 300\text{mm}^2$ Pedido: - Tensões normais nas barras
- Reações
Com:
1- $F = 60\text{kN}$; $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 0$
2- $F = 0$; $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 250^\circ\text{C}$

1.5. Determine as matrizes de rigidez das barras rodadas seguintes (EB2GLR).

Dados: $d = 40\text{mm}$ (diâmetro); $E = 69\text{GPa}$;

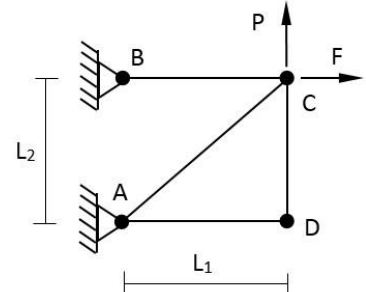
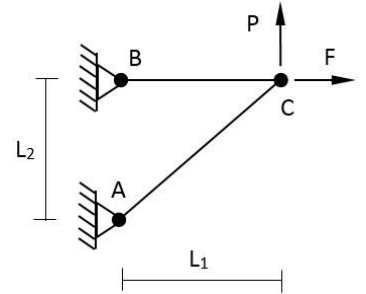
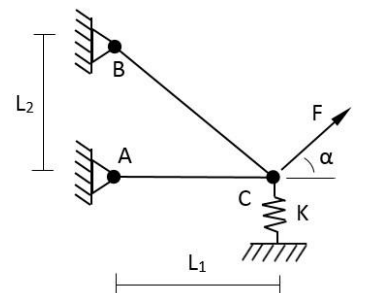
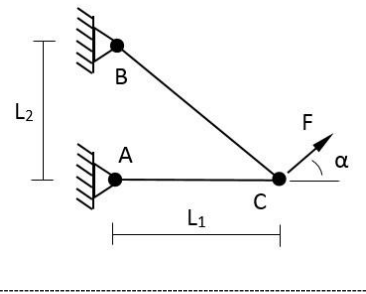
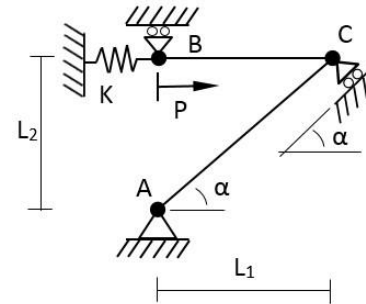
- a)  Coordenadas dos nós:
1-(0,1;0,1)
2-(0,4;0,2)
- b)  Coordenadas dos nós:
1-(0;0)
2-(0,2;-0,2)
- c)  Coordenadas dos nós:
1-(1;2)
2-(-0,3;3)
- d)  Coordenadas dos nós:
1-(0;1,2)
2-(-0,5;0)

1.6. Determine a tensão normal da barra roda seguinte (EB2GLR).

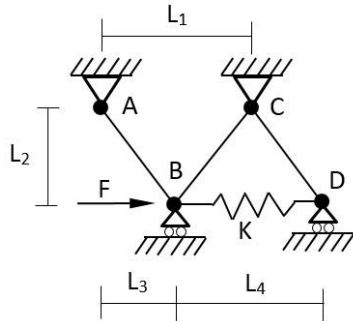


Dados:
 $U_1 = 1,25\text{mm}$;
 $U_2 = 0,5\text{mm}$;
 $U_3 = 1,875\text{mm}$;
 $U_4 = 2,25\text{mm}$;
 $A = 500\text{mm}^2$;
 $L = 1\text{m}$; $A = 485\text{mm}^2$;
 $E = 25\text{GPa}$;
 $\alpha = 45^\circ$

1.7. Responda aos pedidos das treliças seguintes (EB2GLR).

<p>a)</p> 	<p>Dados: $L_1=L_2=L=1,5\text{m}$; $F=5\text{kN}$; $P=3\text{kN}$; $A=225\text{mm}^2$; $E=69\text{GPa}$</p>	<p>Pedido: - Matriz de rigidez - Deslocamento dos nós - Tensões normais nas barras</p>
<p>b)</p> 	<p>Dados: $L_1=L_2=L=1,5\text{m}$; $F=5\text{kN}$; $P=3\text{kN}$; $A=225\text{mm}^2$; $E=69\text{GPa}$</p>	<p>Pedido: - Matriz de rigidez - Deslocamento dos nós - Tensões normais nas barras</p>
<p>c)</p> 	<p>Dados: $L_1=4\text{m}; L_2=3\text{m}$; $K=50\text{N/mm}$; $F=15\text{kN}; \alpha=50^\circ$; $A=314,159\text{mm}^2$; $E=80\text{GPa}$</p>	<p>Pedido: - Matriz de rigidez - Deslocamento dos nós - Reações - Verifique o equilíbrio energético</p>
<p>d)</p> 	<p>Dados: $L_1=4\text{m}; L_2=3\text{m}$; $F=15\text{kN}; \alpha=50^\circ$; $A=314,159\text{mm}^2$; $E=80\text{GPa}$</p>	<p>Pedido: - Matriz de rigidez - Deslocamento dos nós - Reações - Verifique o equilíbrio energético</p>
<p>e)</p> 	<p>Dados: $L_1=L_2=L=2\text{m}$; $K=50\text{N/mm}$; $P=20\text{kN}; \alpha=45^\circ$; $A=314,159\text{mm}^2$; $E=80\text{GPa}$</p>	<p>Pedido: - Matriz de rigidez - Deslocamento dos nós - Tensão normal na barra BC</p>

1.8. Responda aos pedidos das treliças seguintes (EB2GLR).



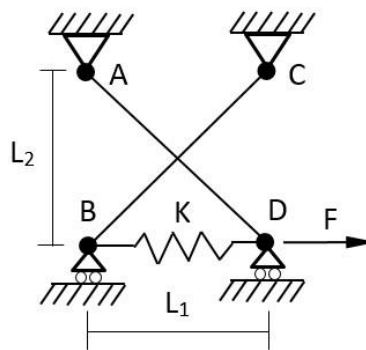
a)

Dados:

$L_1=L_4=2\text{m}$; $L_2=L_3=1\text{m}$;
 $K=50\text{N/mm}$; $F=10\text{kN}$;
 $A=200\text{mm}^2$;
 $E=210\text{GPa}$

Pedido:

- Deslocamento do nó D
- Tensão normal na barra BC



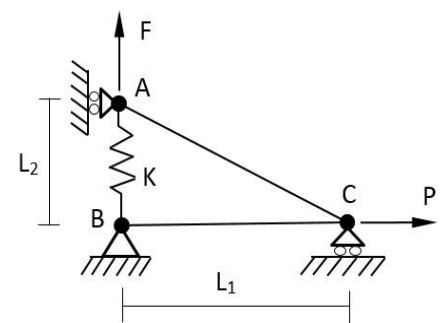
b)

Dados:

$L_1=L_2=2\text{m}$; $K=50\text{N/mm}$;
 $F=10\text{kN}$;
 $A=200\text{mm}^2$;
 $E=205\text{GPa}$

Pedido:

- Deslocamento do nó B
- Tensão normal na barra AD



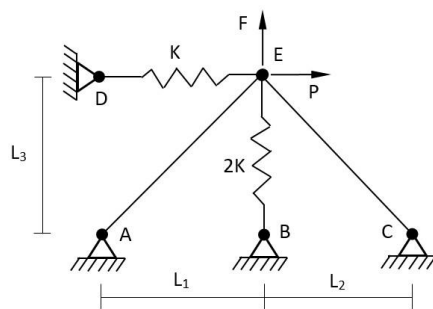
c)

Dados:

$L_1=L_2=2\text{m}$; $K=50\text{N/mm}$;
 $F=10\text{kN}$; $P=20\text{kN}$;
 $A=150\text{mm}^2$;
 $E=204\text{GPa}$

Pedido:

- Deslocamento do nó C
- Tensão normal na barra AC



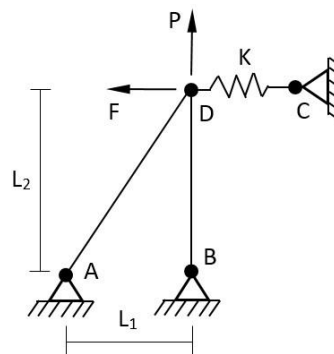
d)

Dados:

$L_1=L_2=L_3=2\text{m}$; $K=50\text{N/mm}$;
 $F=10\text{kN}$; $P=20\text{kN}$;
 $A=200\text{mm}^2$;
 $E=204\text{GPa}$

Pedido:

- Deslocamento do nó E
- Tensão normal na barra AE



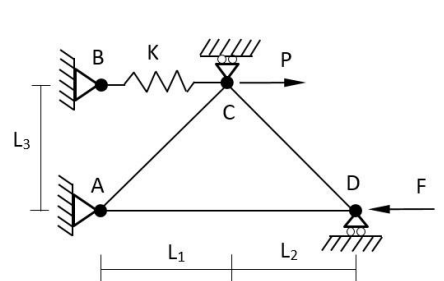
e)

Dados:

$L_1=L_2=2\text{m}$; $K=50\text{N/mm}$;
 $F=10\text{kN}$; $P=5\text{kN}$;
 $A=100\text{mm}^2$;
 $E=206\text{GPa}$

Pedido:

- Deslocamento do nó D
- Tensão normal na barra AD



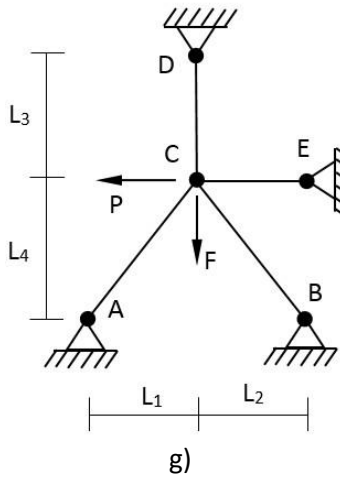
f)

Dados:

$L_1=L_2=L_3=1\text{m}$; $K=50\text{N/mm}$;
 $F=10\text{kN}$; $P=15\text{kN}$;
 $A=150\text{mm}^2$;
 $E=200\text{GPa}$

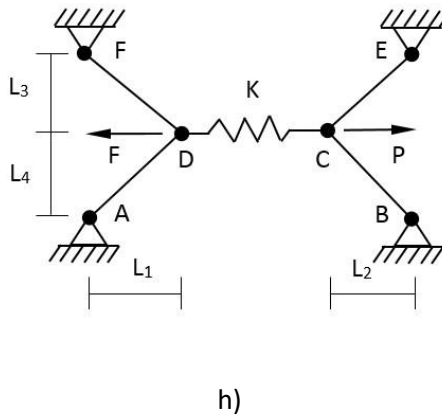
Pedido:

- Deslocamento do nó C
- Tensão normal na barra DC



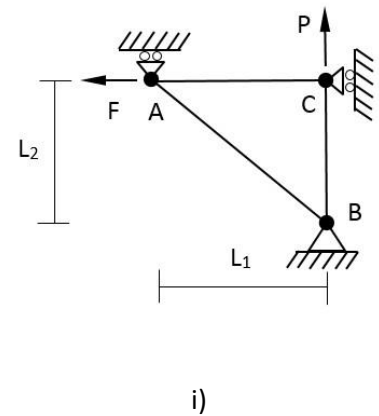
Dados:
 $L_1=L_2=L_3=L_4= 2\text{m}$;
 $F=15\text{kN}$; $P=5\text{kN}$;
 $A=250\text{mm}^2$; $E=204\text{GPa}$

Pedido:
 - Deslocamento do nó C
 - Tensão normal na barra CB



Dados:
 $L_1=L_2=L_3=L_4= 2\text{m}$;
 $K=50\text{N/mm}$; $F=10\text{kN}$; $P=5\text{kN}$;
 $A=150\text{mm}^2$; $E=206\text{GPa}$

Pedido:
 - Deslocamento do nó D
 - Tensão normal na barra AD



Dados:
 $L_1=L_2= 1\text{m}$;
 $F=10\text{kN}$; $P=25\text{kN}$;
 $A=100\text{mm}^2$; $E=210\text{GPa}$

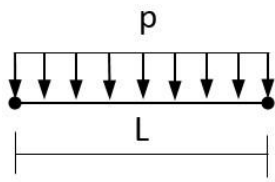
Pedido:
 - Deslocamento do nó A e C
 - Tensão normal na barra AB

1.9. Responda aos pedidos da alinha 1.8 substituindo as cargas indicadas por uma variação de temperatura $\Delta T=+100^\circ\text{C}$ em toda a estrutura. Considere que as barras têm um coeficiente de dilatação térmico de $14 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$.

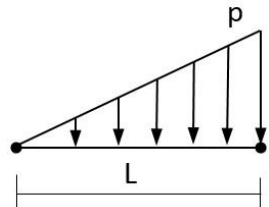
1.10. Determine as frequências naturais e os respetivos modos de vibração das estruturas da alinha 1.8, com massa volúmica $\rho=7800\text{kg/m}^3$ e $K=4EA/L$. Represente os respetivos modos de vibração.

2. Vigas - Elementos Finitos com 4 graus de liberdade (EV4GL).

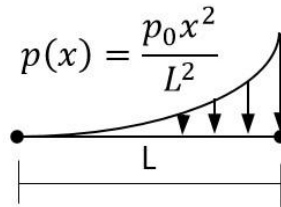
2.1. Escreva o vetor forças de cada carga distribuída seguinte.



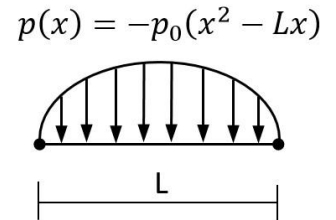
a)



b)

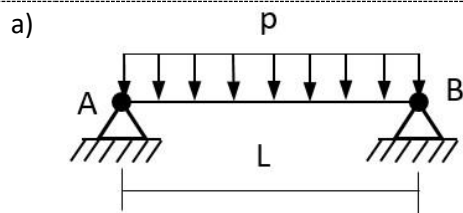


c)



d)

2.2. Responda aos pedidos das vigas seguintes.

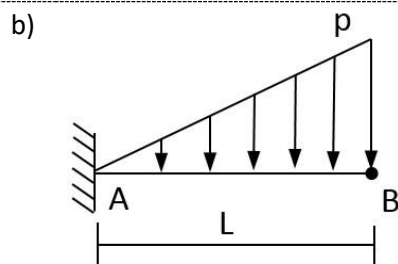


a)

Pedido:

- Compare o valor do v_{max} com o valor aproximado.

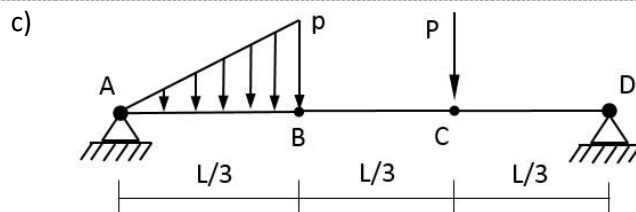
$$v_{max} = v_e(L/2) = -\frac{5pL^4}{384EI}$$



b)

Pedido:

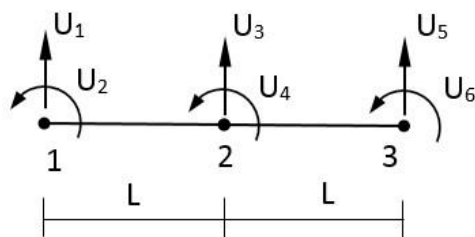
- Determine o deslocamento do ponto B.
- Determine as reações.
- Compare a tensão normal máxima com o valor aproximado.



c)

Pedido:

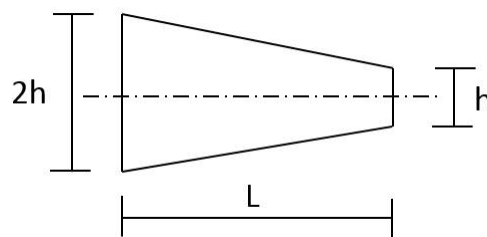
- Escreva o vetor de forças da estrutura.



d)

Pedido:

- Qual é a condição para que haja continuidade na tensão no nó 2.



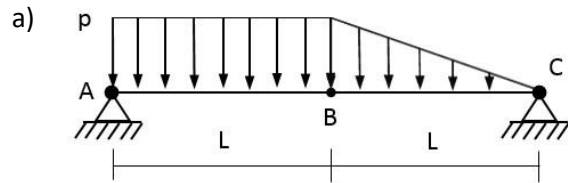
e)

Dados: O elemento representado tem uma espessura t .

Pedido:

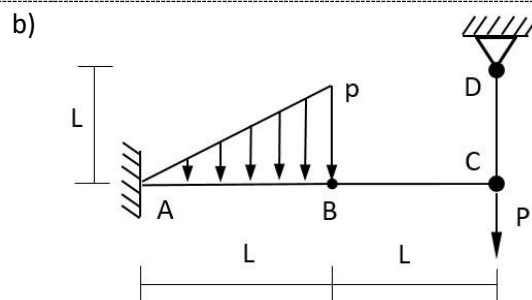
- Determine a energia potencial do elemento.
- Utilize o 1º teorema de Castigliano para determinar o elemento K_{11} da matriz de rigidez.

2.3. Responda aos pedidos das vigas seguintes (EV4GL).



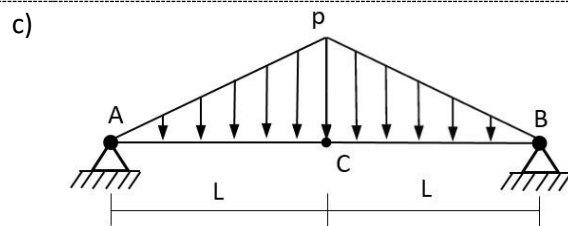
Dados:
 $L=0,3\text{m}$;
 $p=45\text{kN/m}$;
 $A=94404,76\text{mm}^2$;
 $E=70\text{GPa}$;

Pedido:
 - Matriz de rigidez
 - Vetor de forças
 - Deslocamento dos nós
 - Tensão normal à direita e à esquerda do ponto B.

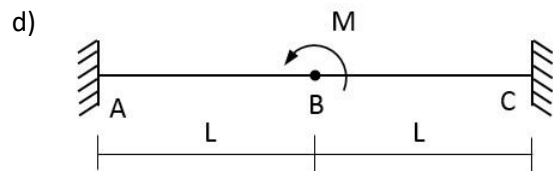


Dados:
 - A barra CD sofre uma diferença de temperatura ΔT .

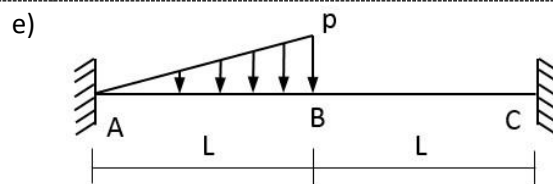
Pedido:
 - Matriz de rigidez
 - Vetor de forças



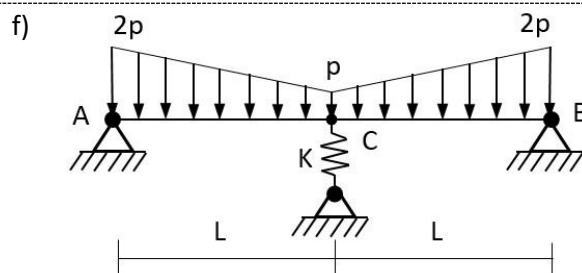
Pedido:
 - Deslocamento vertical do ponto C.
 - Deslocamento vertical para $x=3L/2$.
 - A rotação para $x=L/2$.
 - Momento fletor para $x=L/2$.



Pedido:
 - Deslocamentos do ponto B.
 - A rotação para $x=L/2$.
 - Momento fletor no ponto A.
 - Tensão normal no ponto A.

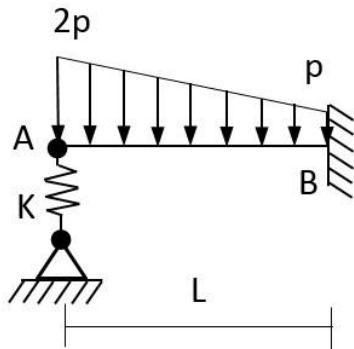


Pedido:
 - Deslocamentos do ponto B.
 - Deslocamento vertical para $x=L/2$.
 - Momento fletor no ponto B.
 - Tensão normal no ponto C.



Pedido:
 - Deslocamentos do ponto C.
 - Deslocamento vertical para $x=L/2$.
 - Momento fletor para $x=3L/2$.
 - Tensão normal no ponto C.

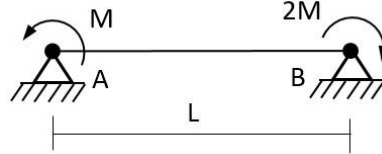
2.4. Determine o deslocamento vertical e a rotação para $x=L/2$ e responda aos restantes pedidos das vigas seguintes (EV4GL).



a)

Pedido:

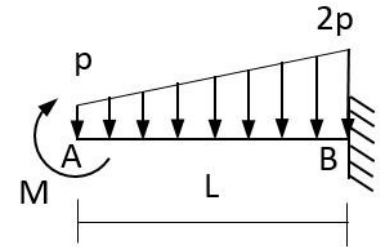
- Deslocamentos do ponto A.
- Momento fletor do ponto B.
- Tensão normal no ponto B.



b)

Pedido:

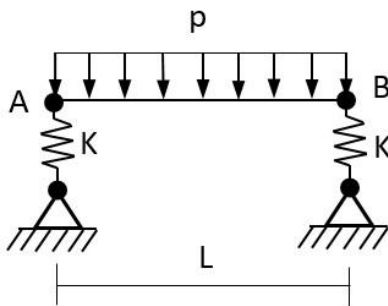
- Rotação do ponto B.
- A rotação para $x=L/2$.
- Tensão normal para $x=L/2$.



c)

Pedido:

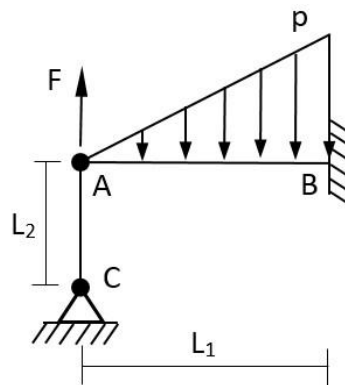
- Deslocamento do ponto A.
- A rotação para $x=L/2$.
- Momento fletor do ponto B.



d)

Pedido:

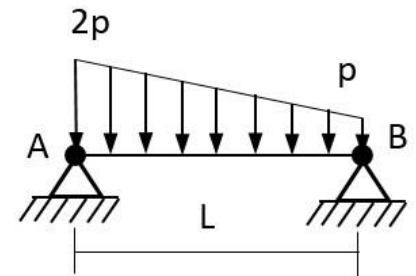
- Deslocamento do ponto A.
- A rotação para $x=L/2$.
- Momento fletor do ponto B.



e)

Pedido:

- Deslocamento do ponto A.
- A rotação para $x=L/2$.
- Momento fletor do ponto B.



f)

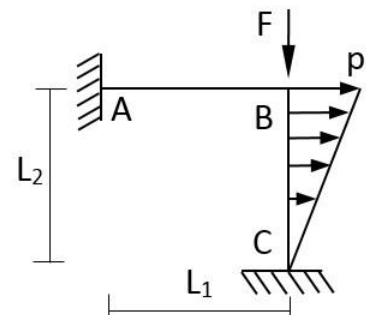
Pedido:

- Deslocamento do ponto A.
- A rotação para $x=L/2$.
- Momento fletor do ponto B.

3. Vigas Barra - Elementos Finitos com 6 graus de liberdade (EV6GLR).

3.1. Responda aos pedidos das vigas-barras seguintes.

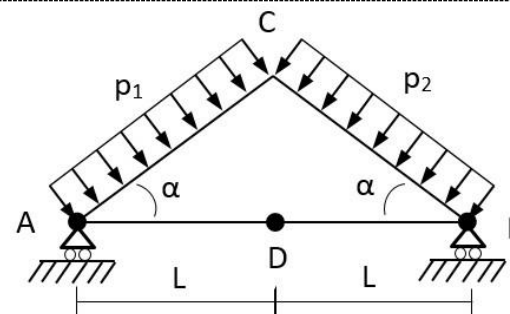
a)



Dados:
 $L_1=150\text{mm}$;
 $L_2=500\text{mm}$;
 $p=150\text{kN/mm}$;
 $F=10\text{kN}$;
 $A=500\text{mm}^2$;
 $I=20000\text{mm}^4$;
 $E=200\text{GPa}$;

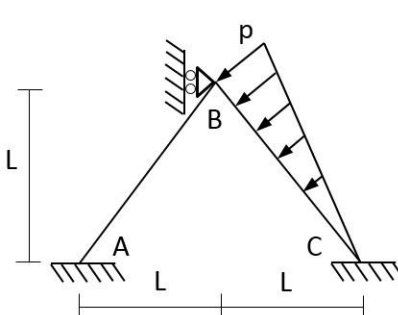
Pedido:
 - Deslocamento do nó B
 - Momento fletor a meio de cada viga

b)



Dados:
 $L=1500\text{mm}$; $p_1=p_2=10\text{N/mm}$; $\alpha=15^\circ$;
 $A_{AC}=A_{CB}=800\text{mm}^2$; $A_{AD}=A_{DB}=640\text{mm}^2$;
 $I_{AC}=I_{CB}=6,666 \times 10^6\text{mm}^4$; $E=200\text{GPa}$

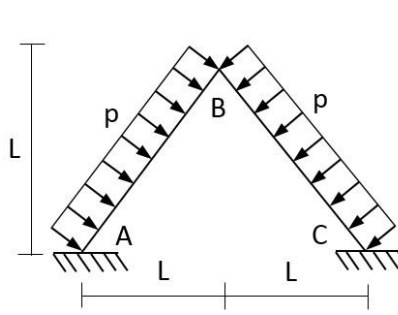
Pedido:
 - Tensão na barra AD.
 - Tensão a meio da barra AC.



c)

Dados:
 $L=1\text{m}$; $p=20\text{N/mm}$;
 $A=500\text{mm}^2$; $I=4 \times 10^6\text{mm}^4$;
 $E=200\text{GPa}$

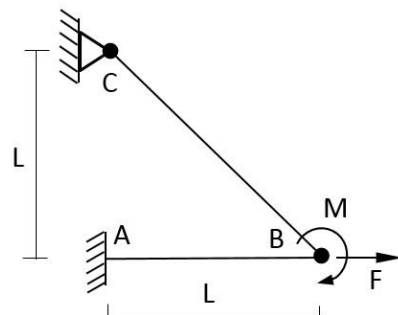
Pedido:
 - Deslocamentos do ponto B.
 - Momento fletor a meio da viga AC.



d)

Dados:
 $L=1\text{m}$; $p=20\text{N/mm}$;
 $A=500\text{mm}^2$; $I=4 \times 10^6\text{mm}^4$;
 $E=200\text{GPa}$

Pedido:
 - Deslocamentos do ponto B.
 - Reações nos apoios.

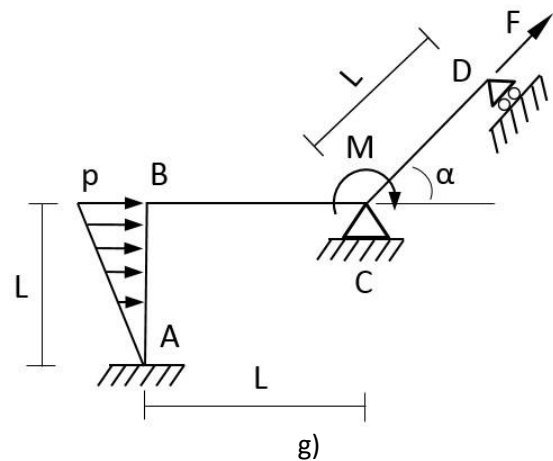
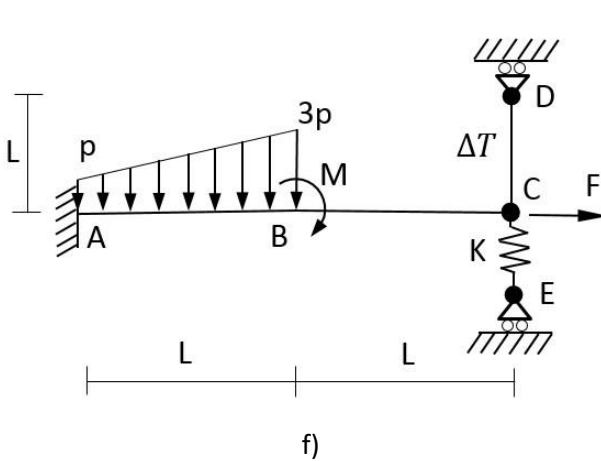
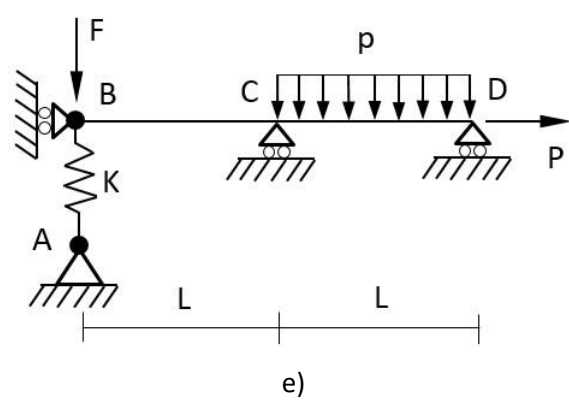
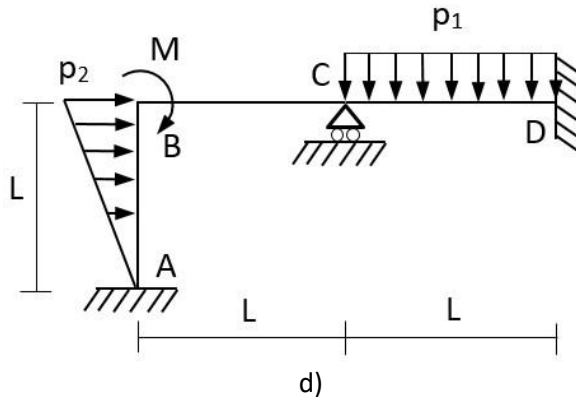
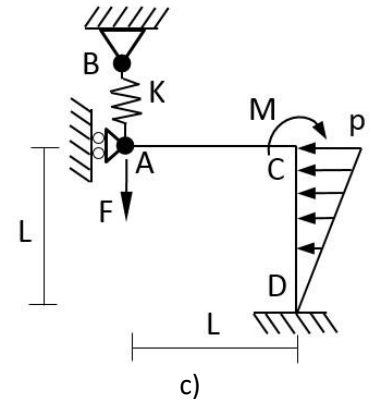
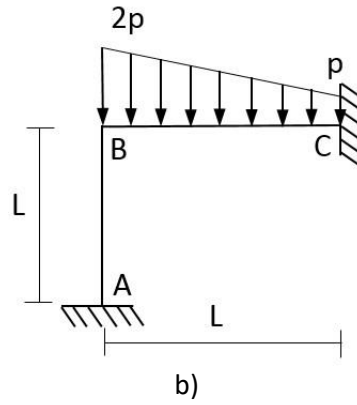
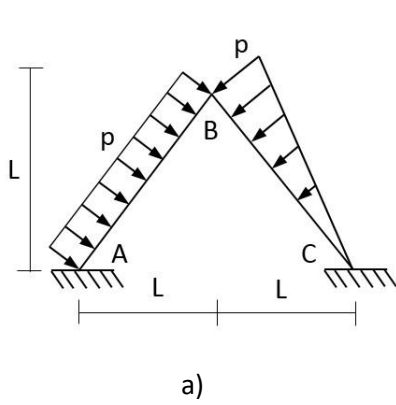


e)

Dados:
 $L=1\text{m}$; $M=20\text{N.m}$; $F=10\text{kN}$;
 $A_{CB}=640\text{mm}^2$; $A_{AB}=800\text{mm}^2$;
 $I_{AB}=6,666 \times 10^6\text{mm}^4$; $E=200\text{GPa}$

Pedido:
 - Deslocamentos do ponto B.
 - Tensão na barra CB.

3.2. Determine a matriz de rigidez e o vetor de força das seguintes estruturas.



3.3. Determine a matriz de rigidez e o vetor de força das seguintes estruturas.

