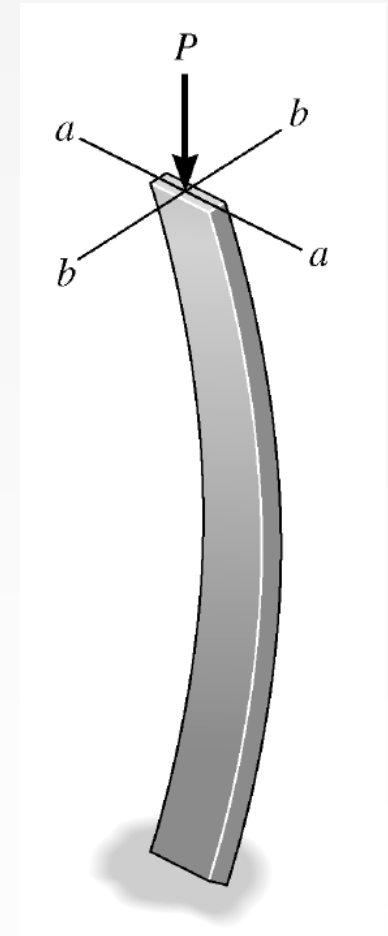
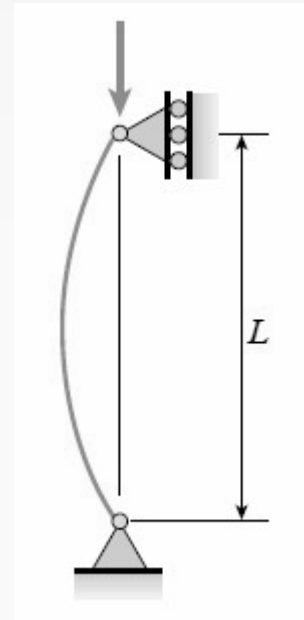


Resistência dos Materiais

Capítulo 6

- Instabilidade elástica



Acetatos e imagens baseados nos livros:

- Mechanics of Materials - Beer & Johnson
- Mecânica e Resistência dos Materiais – V. Dias da Silva
- Resistência dos Materiais, R.C. Hibbeler



- Noção de instabilidade axial - Flambagem
- Fórmula de Euler
- Fórmula de Euler com vários tipos de apoios
- Fórmula de Johnson
- Projeto de colunas



Noção de instabilidade axial - Flambagem

Capítulo 6

Resistência dos Materiais

Exemplos

- Coloque uma régua de pé sobre uma mesa e exerça uma força vertical no topo da régua. A medida que aumenta a força a régua vai iniciar um processo de flexão encurvando a régua. Se continuar a aumentar a força a régua irá quebrar pois o plástico é um material frágil.
- Se colocar um pé sobre uma lata de 33cl vai reparar que ela será amaçada logo a partir de uma determinada força.





Noção de instabilidade axial - Flambagem

Capítulo 6

Colunas: Elementos estruturais compridos e esbeltos sujeitos a uma força axial de compressão.

Flambagem: Deflexão lateral que as colunas sofrem também designada por **encurvadura**. Este fenómeno torna a estrutura instável e grande parte das vezes leva a uma falha repentina e dramática da estrutura.

Carga Crítica (P_{cr}): É a carga axial máxima que uma coluna pode suportar antes de ocorrer a flambagem ou a instabilidade da estrutura.

Qualquer carga adicional provocará flambagem na coluna ou seja instabilidade estrutural.





Formula de Euler - Colunas

Determinação da Carga Crítica

Ao assumir uma carga de compressão significativa, a coluna vai fletir.

A equação diferencial do deslocamento y devido à flexão é dada por:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

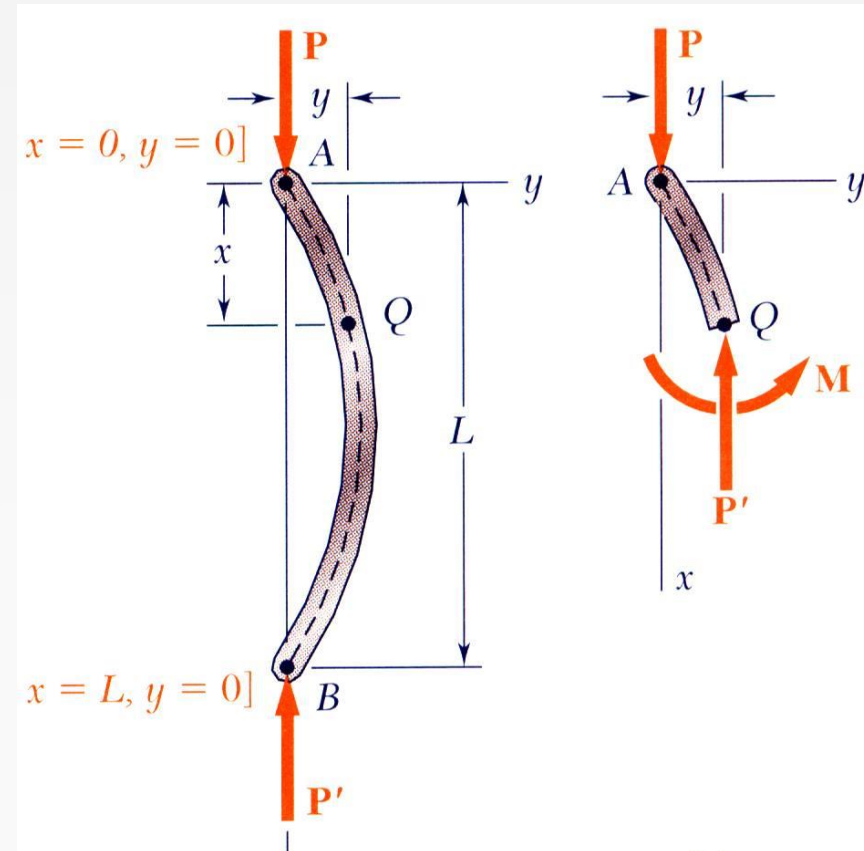
Em qualquer secção o momento fletor M é descrito por:

$$M = -P \cdot y$$

Assim temos:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI}\right) y = 0$$

Coluna entre dois apoios fixos



I – Menor momento de inercia da secção

E – Módulo de Elasticidade do material



Formula de Euler - Colunas

Determinação da Carga Crítica

Esta equação diferencial tem a seguinte solução:

$$y = C_1 \cdot \text{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + C_2 \cdot \text{cos} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right)$$

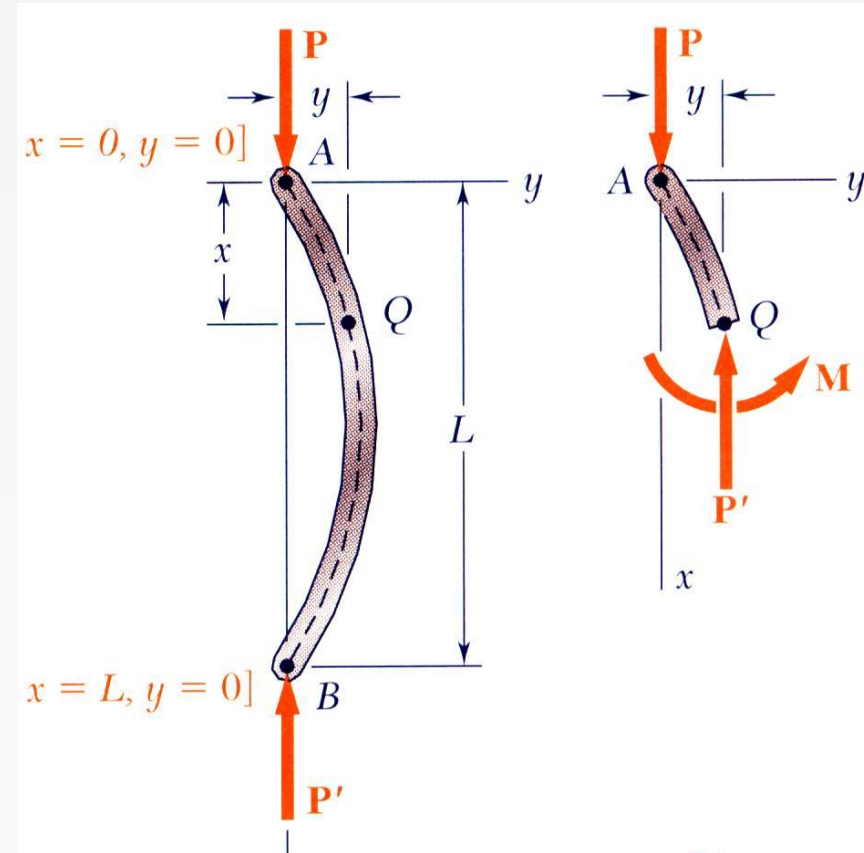
Esta equação do deslocamento depende de duas constantes C_1 e C_2 que podem ser determinadas com duas condições de fronteira:

$$y(0) = 0 \text{ e } y(L) = 0$$

Com $y(0) = 0$ temos:

$$y = C_1 \cdot \cancel{\text{sen}(0)} + C_2 \cdot \cancel{\text{cos}(0)} = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow y = C_1 \cdot \text{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right)$$

Coluna entre dois apoios fixos





Formula de Euler - Colunas

Determinação da Carga Crítica

$$y = C_1 \cdot \text{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right)$$

Com $y(L) = 0$ temos:

$$C_1 \cdot \text{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0$$

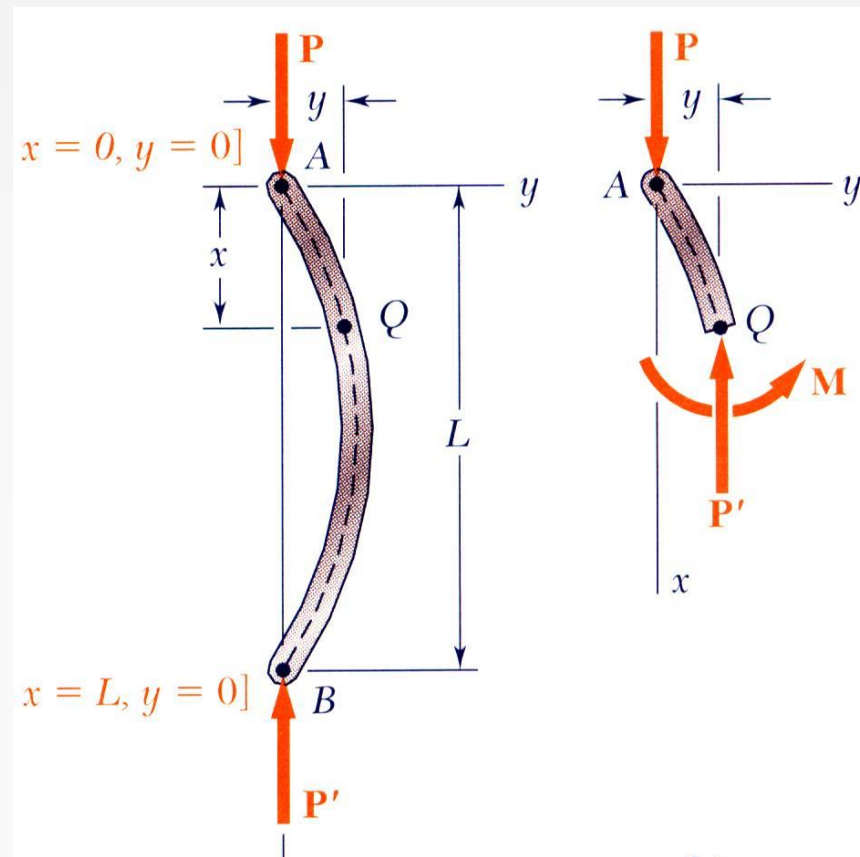
Temos um produto entre dois valores logo temos duas condições, ou:

Condição 1: $C_1 = 0$ ou

Condição 2: $\text{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0$

Condição 1 - Se $C_1 = 0$ temos $y = 0$, ou seja, a coluna mantém-se vertical. Quando isto acontecer a Carga não será suficiente para criar instabilidade.

Coluna entre dois apoios fixos





Formula de Euler - Colunas

Determinação da Carga Crítica

Condição 2

Se $\text{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0$ temos:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = n\pi \Rightarrow P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}, n = 1, 2, \dots$$

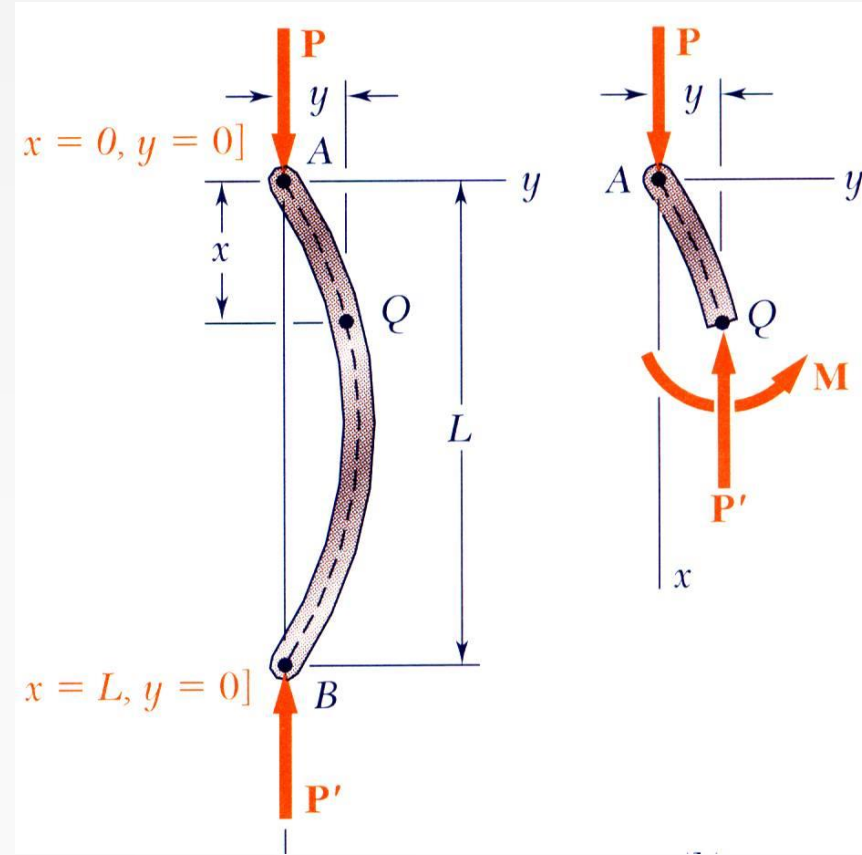
Para cada n temos uma Carga que anula a Condição 2, logo para cada n temos uma carga crítica.

Para $n=1$ temos o **menor valor de P** logo a Carga Crítica.

Carga Crítica
Formula de Euler

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Coluna entre dois apoios fixos



O modo de flambagem correspondente:

$$y(x) = C_1 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right)$$



Formula de Euler - Colunas

Tensão Crítica e Índice de esbeltez

$$\left. \begin{aligned} P_{cr} &= \frac{\pi^2 EI}{L^2} \\ \sigma_{cr} &= \frac{P_{cr}}{A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sigma_{cr} &= \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} \\ r &= \sqrt{\frac{I}{A}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{L^2} r^2 = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

σ_{cr} – Tensão Crítica (*Critical Stress*)

r – Raio de Giração da secção em relação ao mesmo eixo do momento de inercia I

Índice de Esbeltez

$$\lambda = \frac{L}{r}$$

\Rightarrow

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Tensão Crítica
Formula de Euler

λ – Índice de Esbeltez – (*Slenderness Ratio*)

É medida da flexibilidade da coluna e pode ser entendida como uma característica geométrica da estrutura que tem a informação da secção em relação a um eixo, comprimento e aos apoios nessa direcção.



Formula de Euler - Colunas

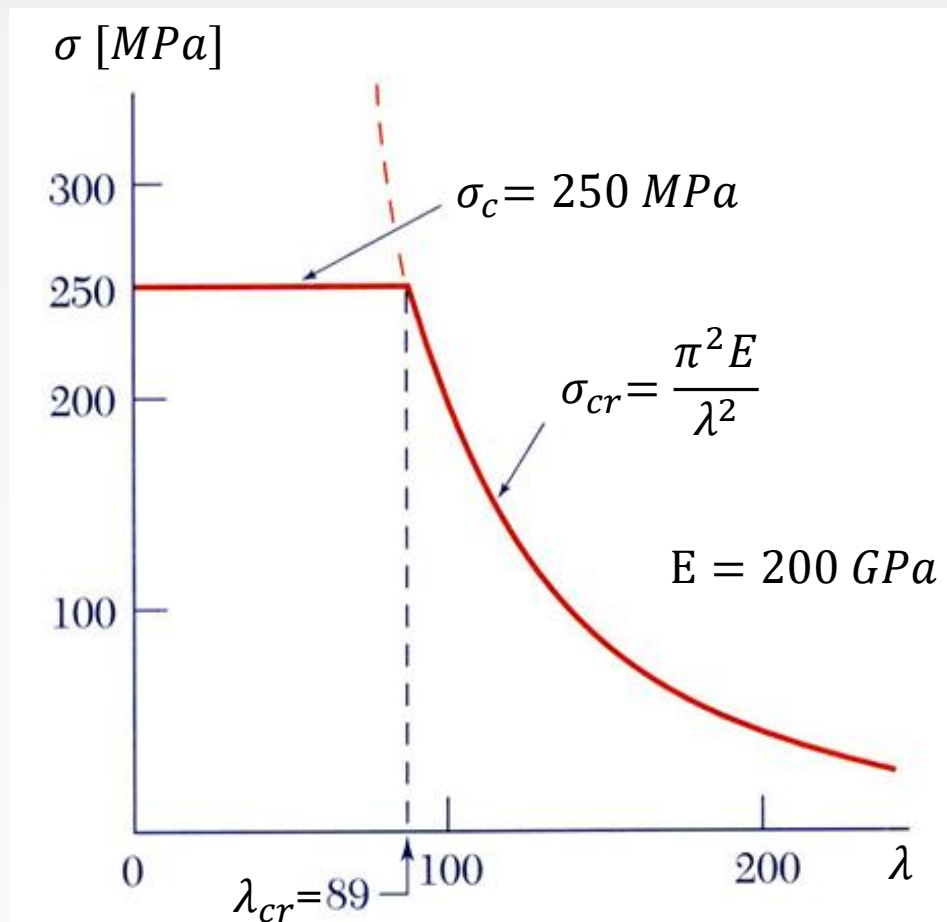
Tensão Crítica vs. Índice de esbeltez

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Quando a Tensão Crítica for igual a tensão de cedência do material encontramos o Índice Esbeltez limite ou critico. Ou seja;

$$\sigma_{cr} = \sigma_c \Rightarrow \lambda_{cr} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_c}}$$

Índice de Esbeltez limite ou Índice de Esbeltez critico.



Para $\sigma_{cr} > \sigma_c \Rightarrow \lambda < \lambda_{cr}$ há deformação plástica antes de haver instabilidade

Nota: A σ_c pode ser substituída numa situação de projeto pela σ_{adm}



Formula de Euler - Colunas

Como melhorar a estrutura para evitar a encurvadura.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \lambda = \frac{L}{r} \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Devemos aumentar $\sigma_{cr} \uparrow$
ou seja,

- aumentar o $E \uparrow$
- diminuir o $\lambda^2 \downarrow$

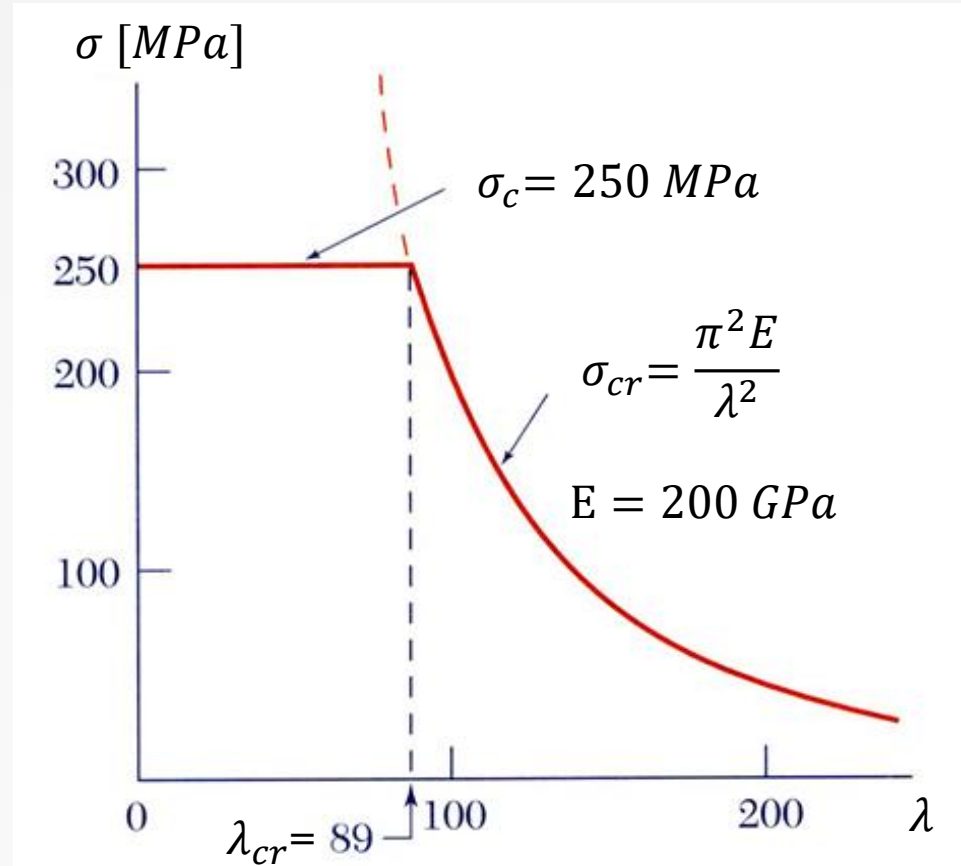
ou seja,

- diminuir $L \downarrow$
- aumentar $r \uparrow$

ou seja,

- aumentar $I \uparrow$
- diminuir $A \downarrow$

$$\sigma_{cr} \uparrow \Rightarrow \begin{cases} E \uparrow \\ \lambda^2 \downarrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L \downarrow \\ r \uparrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \uparrow \\ A \downarrow \end{cases}$$





Formula de Euler - Colunas com vários tipos de apoios

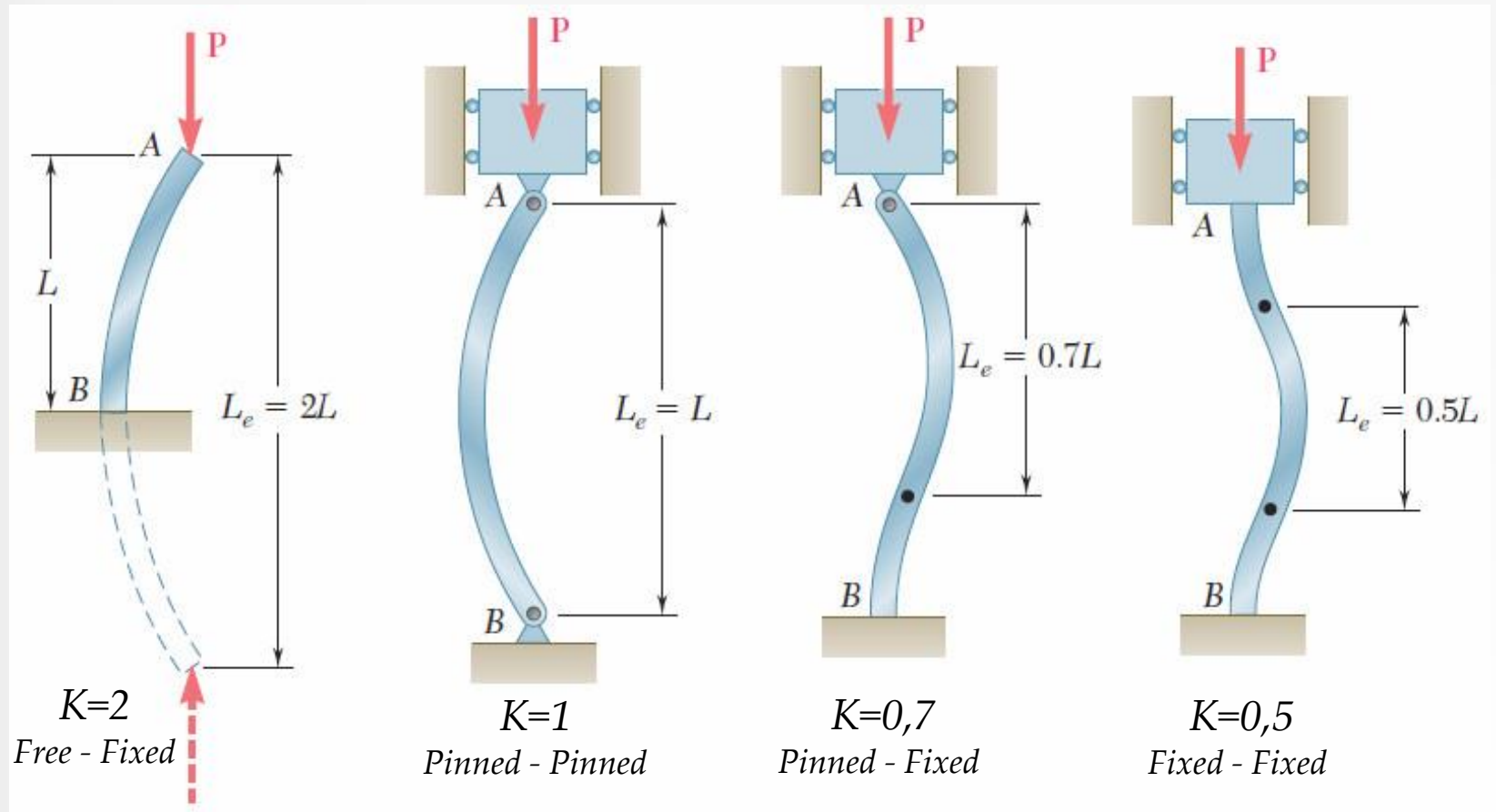
A tensão crítica é alterada se os apoios da coluna mudarem.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_e^2} \quad \lambda_e = \frac{L_e}{r} \quad L_e = K \cdot L$$

K - Fator do comprimento efetivo

L_e - Comprimento efetivo

λ_e - Índice de esbeltez efetivo





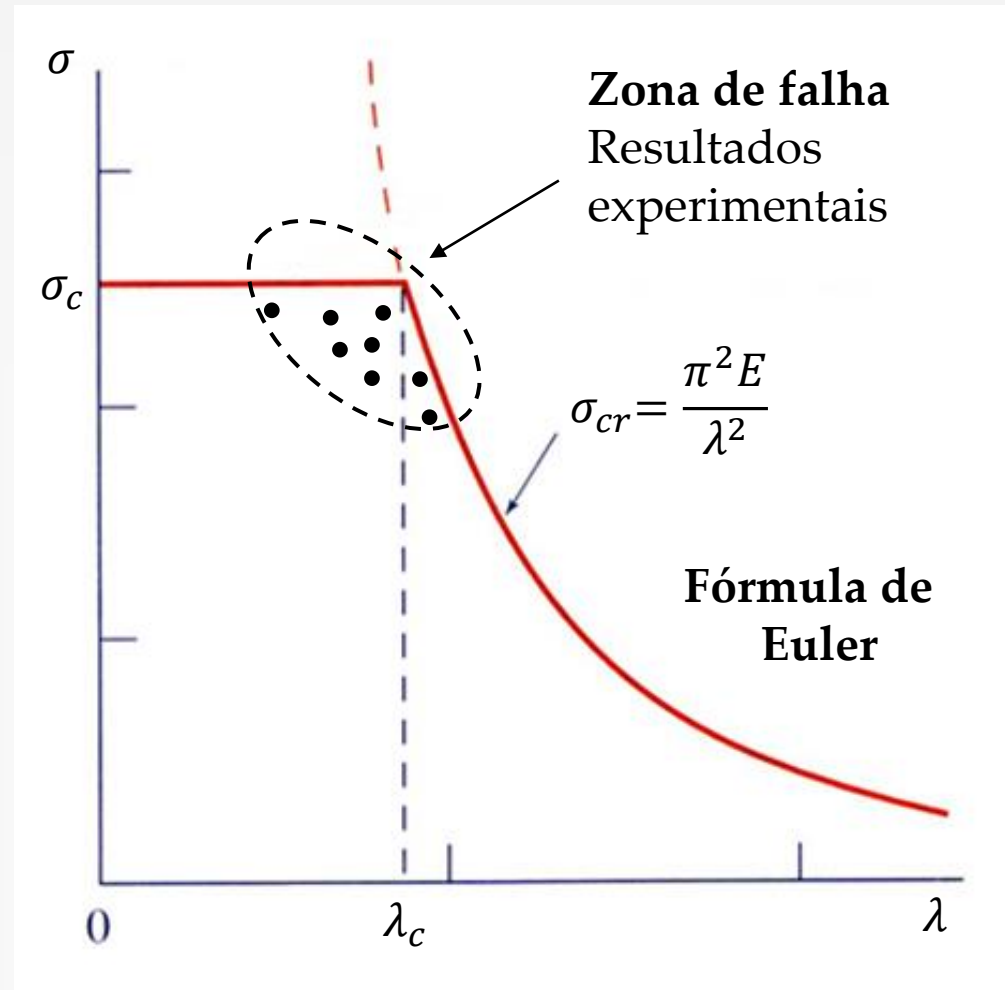
Fórmula de Euler – Limite

Capítulo 6

Limite da Fórmula de Euler

Na prática nas colunas com um índice de esbeltez baixo verifica-se experimentalmente falhas abaixo da tensão de cedência e abaixo da curva de Euler.

A lei empírica mais utilizada para resolver este problema é a parábola de Johnson.



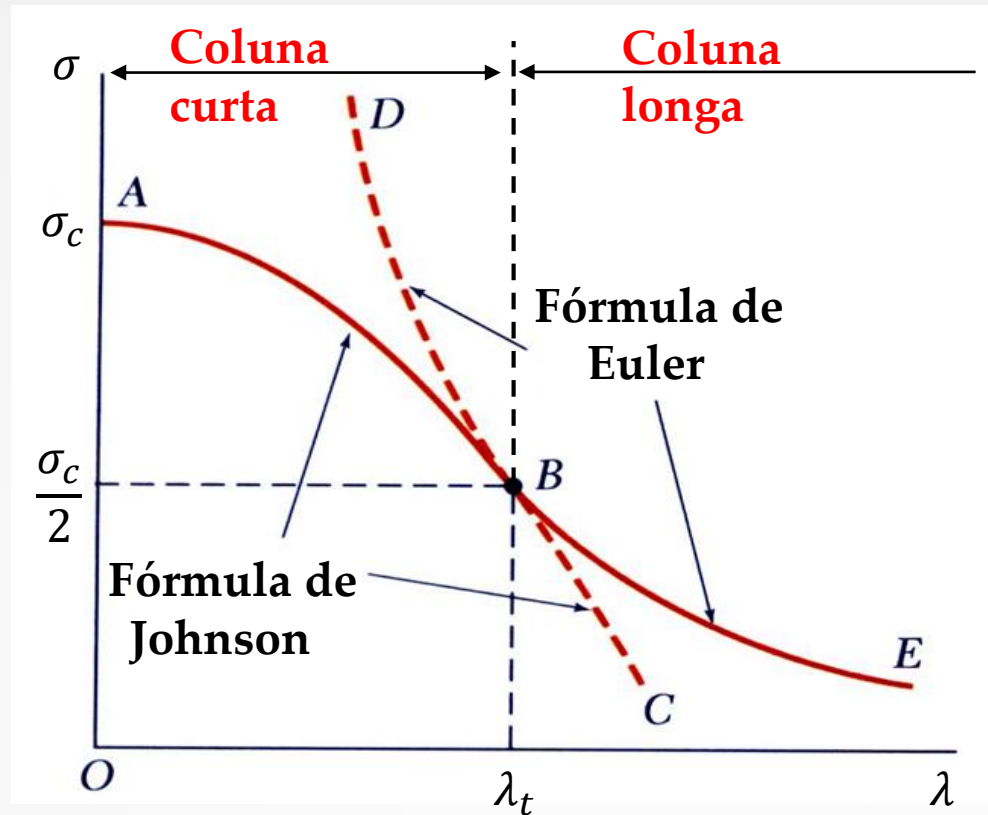


Fórmula de Johnson e Fórmula de Euler

A parábola de Johnson tem tangente nula no ponto A de abcissa nula, ($\lambda = 0, \sigma_{cr} = \sigma_c$) e é tangente à expressão de Euler no ponto B: ($\lambda = \lambda_t, \sigma_{cr} = \frac{\sigma_c}{2}$)

λ_t - Índice de esbeltez de transição também designada por C_c

$$\lambda_t = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_c}} \Rightarrow \lambda_t = \sqrt{2} \lambda_{cr}$$



Tensão Crítica de Johnson

$$\lambda \leq \lambda_t$$

$$\sigma_{cr} = \sigma_c \left(1 - \frac{\lambda_e^2}{2\lambda_t^2} \right)$$

$$\sigma_{cr} = \sigma_c - \frac{\sigma_c^2}{4\pi^2 E} \lambda_e^2$$

Tensão Crítica de Euler

$$\lambda > \lambda_t$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_e^2}$$



Dados: σ_c , E , L , geometria da secção e os 4 tipos de apoios.

1- Calcular a área A

2- Para cada um dos dois eixos da secção, calcular:

2.1- O momento de inercia I

2.2- O raio de giração, $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$

2.3- O comprimento efetivo, $L_e = KL$

2.4- O índice de esbeltez efetivo, $\lambda_e = \frac{L_e}{r}$

Escolher o maior λ_e dos dois eixos.

3- Calcular o índice de esbeltez de transição, $C_c = \lambda_t = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_c}}$



A American Institute of Steel Construction (AISC), determina por omissão um **coeficiente de segurança**, n .

4- Se $\lambda_e > \lambda_t$ - Fórmula de Euler:

$$\text{Tensão Crítica, } \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_e^2} \text{ e segundo AISC, o } n = 1,92$$

5- Se $\lambda_e \leq \lambda_t$ - Fórmula de Johnson

$$\text{Tensão Crítica, } \sigma_{cr} = \sigma_c \left(1 - \frac{\lambda_e^2}{2\lambda_t^2} \right) \text{ e } n = \frac{5}{3} + \frac{3\lambda_e}{8\lambda_t} - \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda_e}{\lambda_t} \right)^3$$

6- Calcular a **Carga Crítica**,

$$- P_{cr} = A \sigma_{cr}$$

$$- \text{Projeto: } \frac{P}{A} < \sigma_{adm} = \frac{\sigma_{cr}}{n} \Rightarrow P < P_{adm} = \frac{P_{cr}}{n} = A \frac{\sigma_{cr}}{n}$$