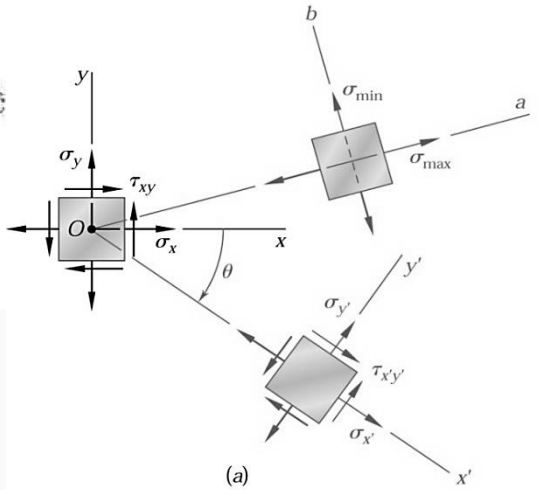
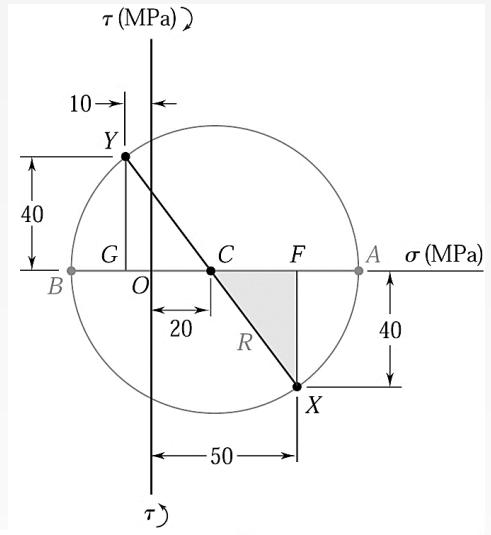
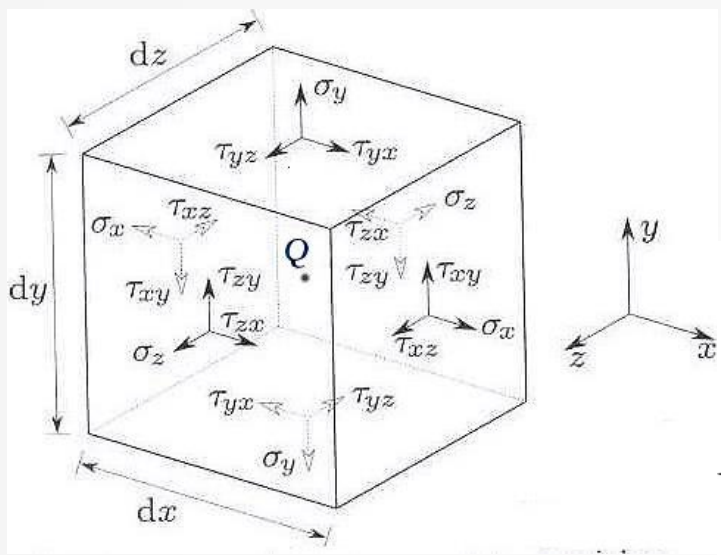
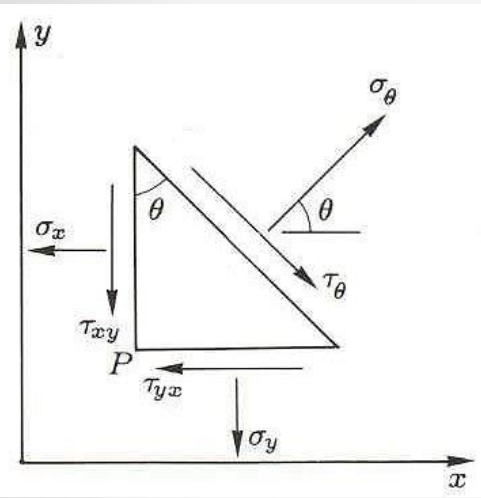


Resistência dos Materiais

Capítulo 2 Elasticidade Linear

- Círculo de Mohr



Acetatos baseados nos livros:
 - Mechanics of Materials - Beer & Jonhson
 - Mecânica e Resistência dos Materiais - V. Dias da Silva



- Carregamento Genérico: Tensões
- Estado de Tensão – Equações de equilíbrio
- Tensões numa faceta arbitrariamente orientada;
- Transposição de eixos de referência;
- Tensões Principais; Invariantes do tensor das tensões;
- Tensão hidrostática e tensões desviadoras;
- Tensões de corte e tensão de corte máxima;
- Extensões principais;
- Tensões num plano oblíquo;
- Estado plano de tensão;
- Tensões num plano rodado de um ângulo
- Círculo de Mohr para estado plano de tensões
- Extensões numa faceta arbitrariamente orientada
- Extensões e direções principais

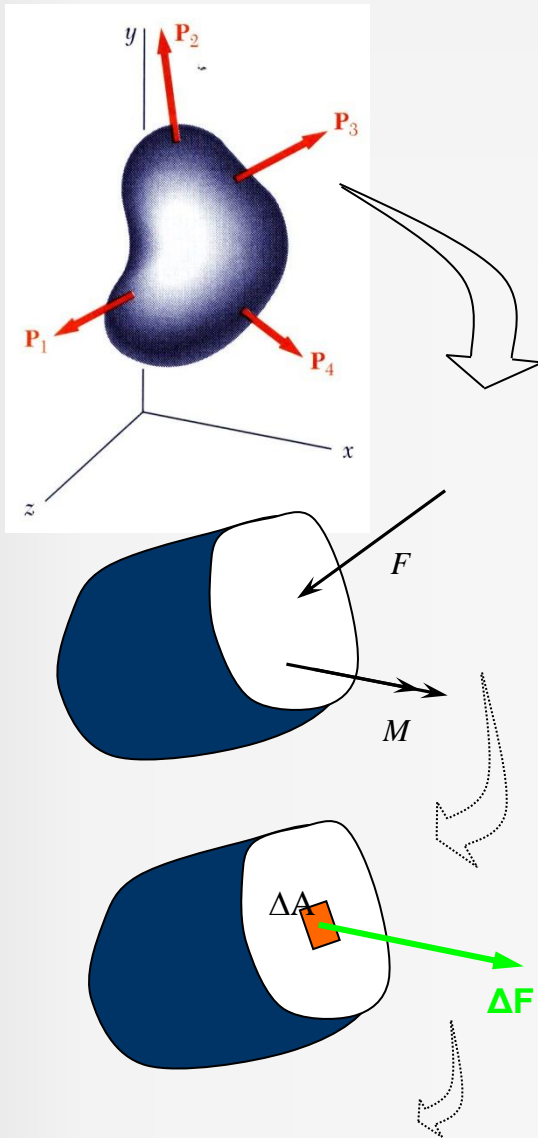


Carregamento Genérico: Tensões

Capítulo 2

Resistência dos Materiais

3



Um elemento sujeito a uma combinação genérica de cargas é separado em dois sub-elementos por um plano aleatório.

A força F e o momento M representam a resultante de forças interiores distribuídas na superfície de corte.

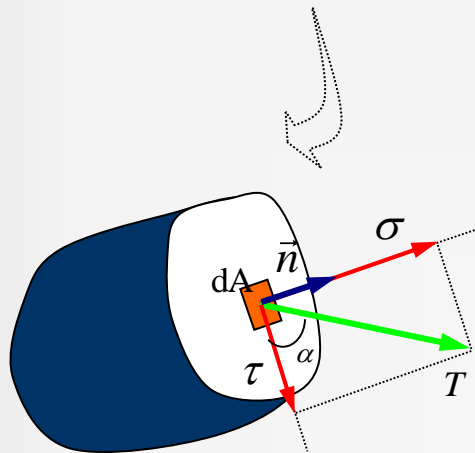
Se considerarmos uma área relativamente pequena, ΔA , admite-se que a força se distribui uniformemente nessa área.

Vetor Tensão

$$T = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$



Carregamento Genérico: Tensões

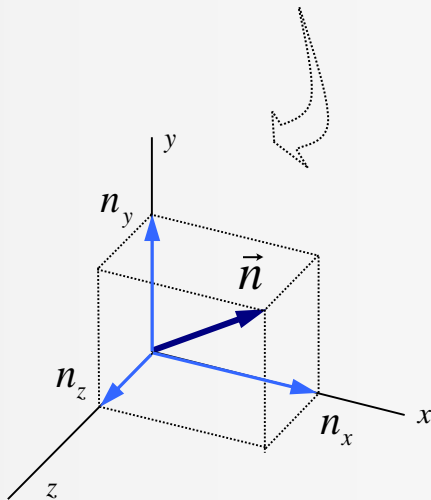


Tensão Normal
Tensão de Corte

$$\sigma = T \sin(\alpha)$$
$$\tau = T \cos(\alpha)$$

A orientação da superfície infinitesimal dA (faceta) num sistema cartesiano xyz pode ser definido por um vetor \vec{n} de comprimento unitário, perpendicular ao plano da faceta e com o sentido que aponta para fora.

Este vetor designa-se por semi-normal da faceta e fica completamente definido pelos cossenos dos ângulos que faz com os sentidos positivos dos eixos de referência.



Cossenos diretores

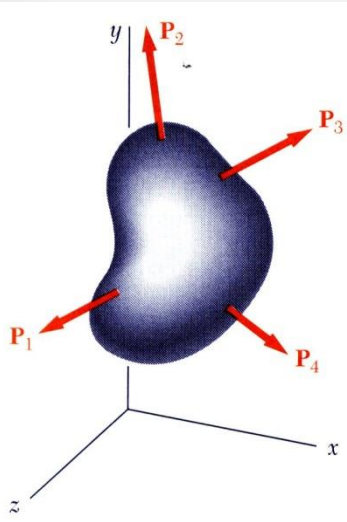
$$\begin{cases} n_x = \cos(\vec{n}, x) = (n, x) = \cos(\varphi) = l \\ n_y = \cos(\vec{n}, y) = (n, y) = \cos(\beta) = m \\ n_z = \cos(\vec{n}, z) = (n, z) = \cos(\gamma) = n \end{cases}$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$



Carregamento Genérico: Tensões

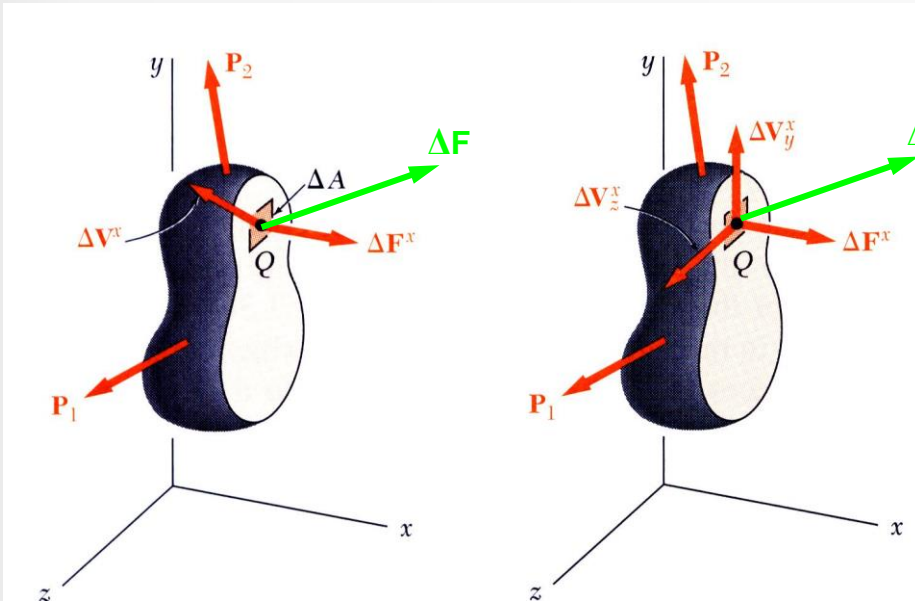
Vamos considerar o mesmo elemento sujeito a uma combinação genérica de cargas e vamos separa-lo em dois sub-elementos por um plano que passa por Q e é paralelo ao plano yz .



$$\Delta \vec{F} = \Delta \vec{F}^x + \Delta \vec{V}_y^x + \Delta \vec{V}_z^x$$

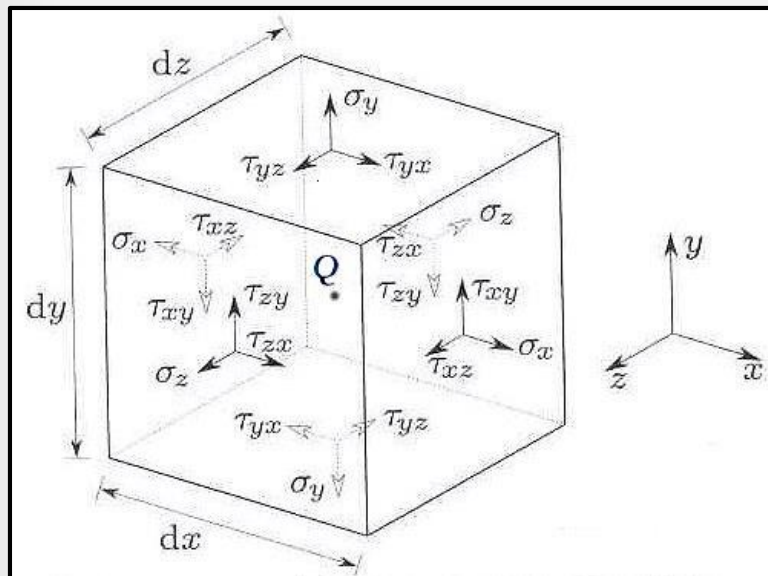
A distribuição das componentes internas de tensão pode ser definida como,

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A}$$



$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A} \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A}$$

Por razões de equilíbrio, uma força interna igual e de sentido oposto tem de ser exercida no outro sub-elemento.



Envolve-se o ponto Q num cubo ($dx dy dz$) com 6 facetas. Uma faceta perpendicular a um dos eixos coordenados, será uma **faceta positiva** se a sua semi-normal tiver o sentido correspondente ao **sentido positivo do eixo** a que é paralela.

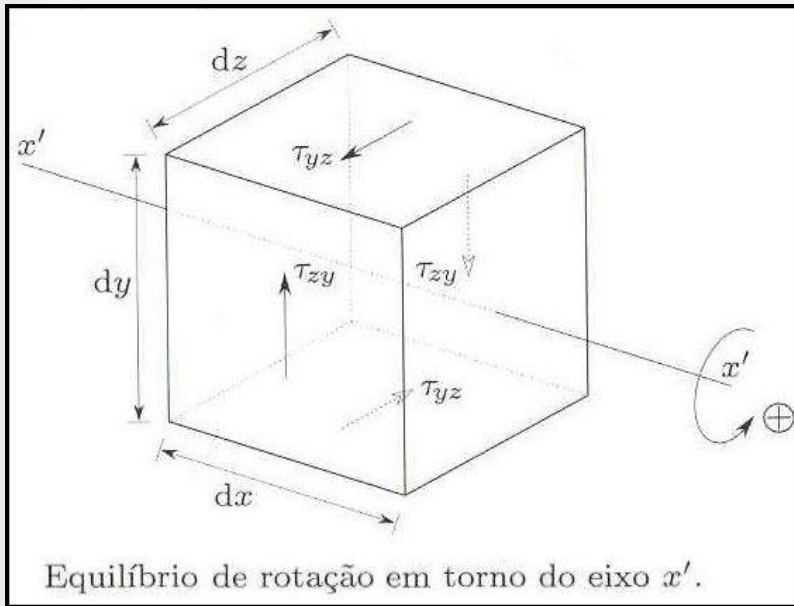
Convenção de Von-Karman :

- São consideradas positivas as tensões na faceta positiva que tem o sentido positivo do eixo a que são paralelas.

- Usa-se a notação σ_x , σ_y e σ_z para as tensões normais que atuam em facetas perpendiculares aos eixos x , y e z .
- As tensões tangenciais são designadas por τ_{ij} , representando o primeiro índice a direção da semi-normal á faceta e o segundo a direção do vetor tensão tangencial. Assim, por exemplo τ_{xy} designa a tensão tangencial que está na faceta perpendicular ao eixo x e tem a direção do eixo y .
- As forças exteriores consideram-se positivas quando tiverem o sentido positivo dos eixos de referência.



Estado de Tensão – Equações de Equilíbrio



Considera-se um sistema de eixo $x'y'z'$ no ponto Q.

Equilíbrio no interior.

Desprezando as forças de massa, estamos em equilíbrio de translação ($\sum F = 0$) em x' , y' e z' .

$$\sigma_x \text{ (faceta positiva)} = \sigma_x \text{ (faceta negativa)}$$

$$\sigma_y = \sigma_y \text{ e } \sigma_z = \sigma_z.$$

Equilíbrio de Rotação.

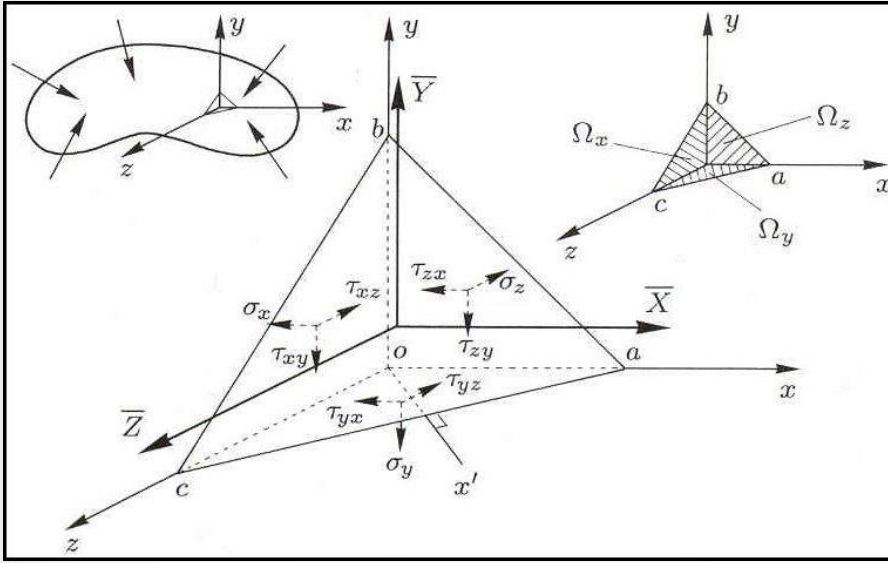
O somatório dos momentos em relação a qualquer dos três eixos tem que ser nulo. Considerando o somatório dos momentos em torno do eixo x' temos,

$$2 \left(\tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} \right) - 2 \left(\tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} \right) = 0 \Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy} ; \tau_{xy} = \tau_{yx} \text{ e } \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

As componentes das tensões tangenciais, que atuam em duas facetas ortogonais e são perpendiculares à aresta comum às duas facetas, são iguais e têm sentidos tais que convergem ambas para a aresta comum ou divergem ambas da mesma.



Estado de Tensão – Equações de Equilíbrio



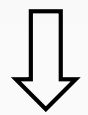
Equilíbrio na fronteira

Considerando um tetraedro elementar junto a superfície do corpo.

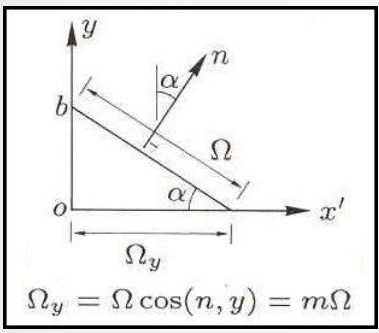
\bar{X} , \bar{Y} e \bar{Z} - São as componentes da resultante da pressão aplicada a superfície.

Equilíbrio das forças segundo a direção x , $\sum F_x = 0$

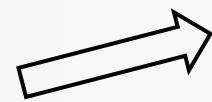
$$\bar{X}\Omega - \sigma_x\Omega_x - \tau_{yx}\Omega_y - \tau_{zx}\Omega_z = 0$$



$$\bar{X}\Omega - \sigma_x l\Omega - \tau_{yx}m\Omega - \tau_{zx}n\Omega = 0$$



$$\begin{aligned} \Omega_x &= l\Omega \\ \Omega_y &= m\Omega \\ \Omega_z &= n\Omega \end{aligned}$$



As duas restantes equações são obtidas da mesma forma.

$$\begin{cases} l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} = \bar{X} \\ l\tau_{yx} + m\sigma_y + n\tau_{yz} = \bar{Y} \\ l\tau_{zx} + m\tau_{zy} + n\sigma_z = \bar{Z} \end{cases}$$



Tensões numa faceta arbitrariamente orientada

Estabelecendo as equações de equilíbrio das forças que atuam num tetraedro, e fazendo uma analogia ao caso anterior podemos concluir as seguintes equações:

Equações de Cauchy

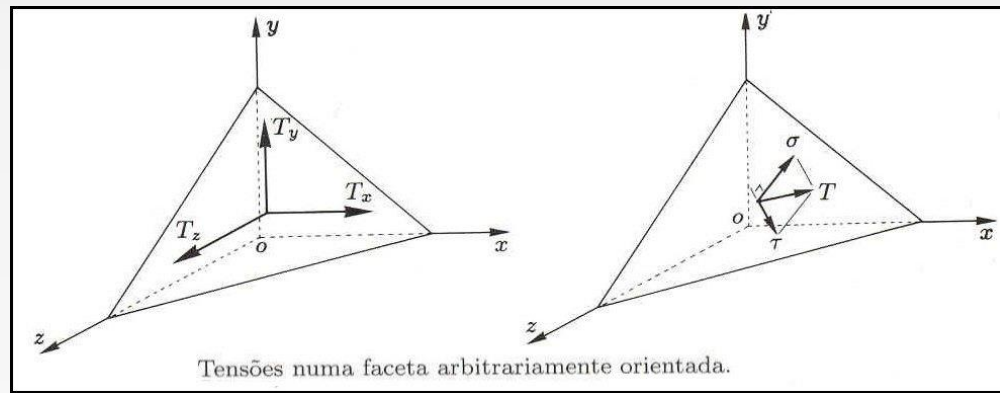
$$\begin{cases} T_x = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} \\ T_y = l\tau_{yx} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\ T_z = l\tau_{zx} + m\tau_{zy} + n\sigma_z \end{cases}$$

Notação matricial:

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

$$\{T\} = [\sigma_{ij}] \{l\}$$

$$\sigma = lT_x + mT_y + nT_z \Rightarrow \sigma = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2lm\tau_{xy} + 2ln\tau_{xz} + 2mn\tau_{yz}$$



Os elementos da matriz $[\sigma_{ij}]$ são suficientes para determinar a tensão em qualquer faceta que passe pelo ponto o , ou seja, definem completamente o estado de tensão em torno do ponto o .

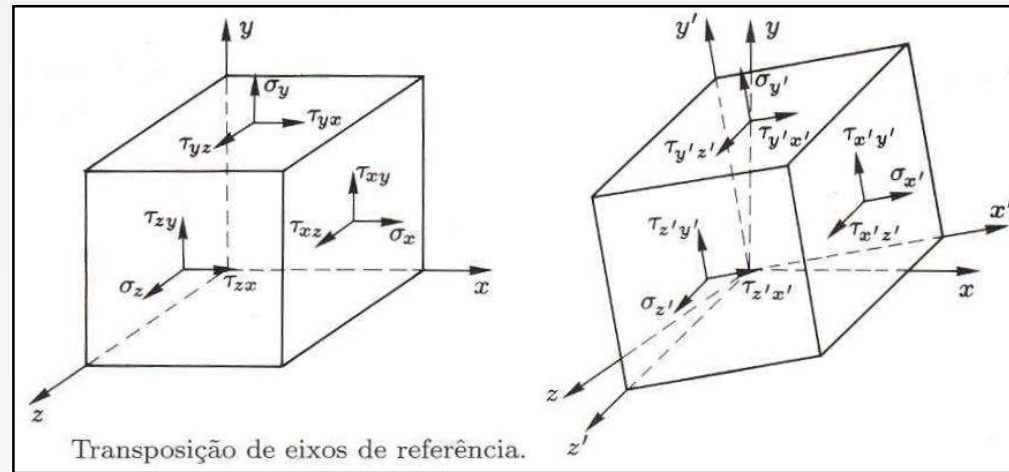
$[\sigma_{ij}]$ – Tensor das tensões

- No $[\sigma_{ij}]$ os seis elementos são independentes, logo a matriz é simétrica.
- Projetando o vetor T na direção da normal à faceta, temos a componente normal da tensão:



Transposição de eixos de referência

Quando se altera o sistema de eixos de referência, o tensor das tensões passa a ser representado por outras componentes. Depois de algum cálculo matricial, temos a seguinte relação entre os tensores:



$$[\sigma'_{ij}] = [l]^t [\sigma_{ij}] [l]$$

Em que,

$$[\sigma'_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$[l] = \begin{bmatrix} (x', x) & (y', x) & (z', x) \\ (x', y) & (y', y) & (z', y) \\ (x', z) & (y', z) & (z', z) \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz $[l]$ são os cossenos diretores entre os respectivos eixos dos dois referenciais.

A matriz $[l]$ é constituída por vetores ortogonais, e uma vez que o produto escalar de vetores ortogonais é nulo;

$$[l] [l]^t = [l]^t [l] = [I] \Rightarrow [\sigma_{ij}] = [l] [\sigma'_{ij}] [l]^t$$



Tensões principais e direções principais

Considerando o mesmo estado de tensão, é sempre possível escolher um sistema de eixos ortogonal $[o x'y'z']$, em que as tensões de corte são nulas existindo somente tensões normais. Estas tensões normais designam-se de **Tensões Principais** e as respectivas direções de **Direções Principais** e os planos por **Planos Principais**;

Considerando um plano (faceta) principal, a tensão tangencial é nula, logo $T = \sigma$ pelo que as componentes do vetor tensão são dadas por :

$$\begin{aligned} T_x &= l\sigma \\ T_y &= m\sigma \\ T_z &= n\sigma \end{aligned}$$

Substituindo em,

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Equação Característica e Invariantes do tensor

Este sistema só tem soluções não nulas, se as equações que o constituem forem linearmente dependentes, isto é, se o determinante for nulo.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = -\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$$

Equação característica do estado de tensão

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$

As quantidades I_1 , I_2 e I_3 tomam valores independentes do referencial usado, pelo que são designados por **Invariantes do estado de tensão**.



Equação Característica e Invariantes do tensor

Calculo das tensões principais e direções principais

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0 \quad (2)$$

- As raízes da equação (2) satisfazem o sistema de equações (1), sem que os três cossenos diretores l , m e n tenham que ser simultaneamente nulos.
- Elas representam as tensões normais que atuam nas facetas em que a tensão tangencial é nula, ou seja, as **tensões principais**.
- As **direções principais** são obtidas substituindo no sistema (1) σ por uma das raízes da equação característica (2).
- Como são linearmente dependentes temos a condição $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ que temos sempre que satisfazer.
- Habitualmente designam-se as **tensões principais** por σ_1, σ_2 e σ_3 com $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.



Tensor hidrostático e tensões desviadoras

Em materiais isotrópicos interessa frequentemente distinguir a componente do tensor das tensões que provoca apenas variação de volume do material e da componente que provoca alterações na forma.

Ora, a variação de volume de material isotrópico resulta da atuação do **tensor isotrópico** ou **hidrostático**:

$$[\sigma'_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad \text{com}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3}$$

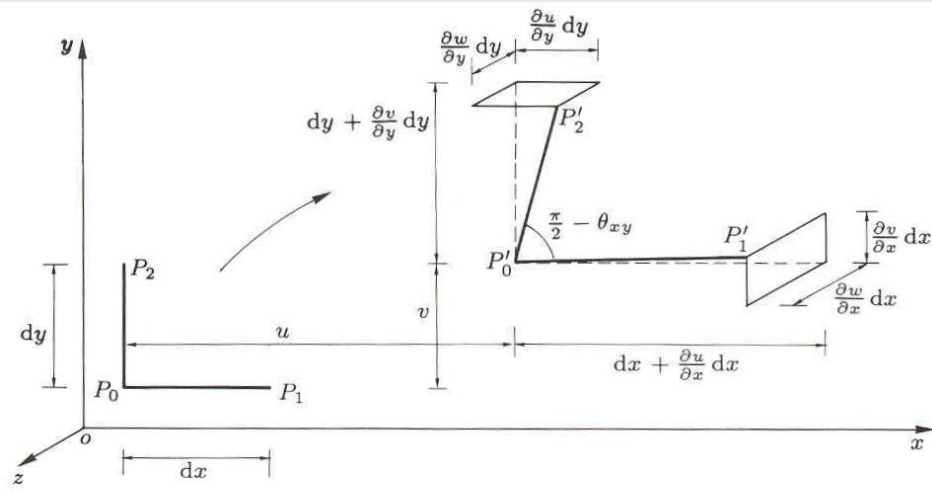
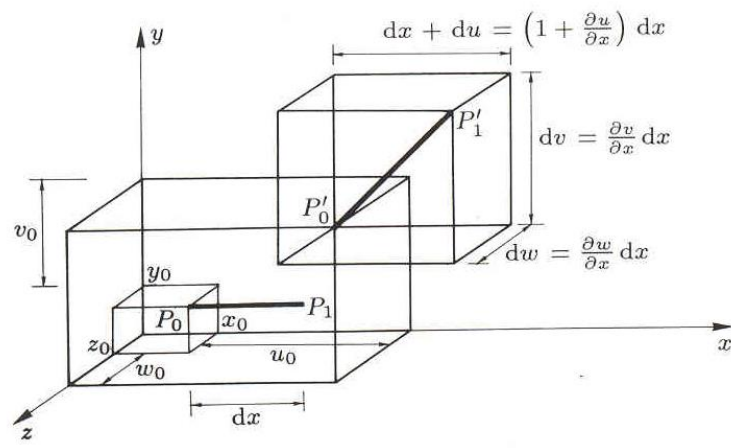
É frequente decompor o tensor das tensões nas seguintes componentes:

$$[\sigma_{ij}] = [\sigma'_{ij}] + [\sigma''_{ij}]$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}$$

**tensor isotrópico
ou hidrostático**

**tensor tangencial puro
ou de desvio das tensões**



Movimento dos segmentos $dx = \overline{P_0P_1}$ e $dy = \overline{P_0P_2}$ na deformação.

Componentes do tensor das extensões

Na maioria dos sólidos usados as extensões e distorções são suficientemente pequenas para poderem ser consideradas infinitesimais, assim desprezando termos de segunda ordem, temos as seguintes relações deslocamento-extensões:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right. e \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{array} \right.$$

tensor das extensões

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$



Teoria das extensões - Lei de Hooke generalizada

Capítulo 2

Para materiais isotrópicos as **direções principais das extensões** coincidem com as **direções principais das tensões**.

Podemos assim relacionar com a lei de Hooke as **tensões principais** com as **extensões principais** e vice-versa.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)) \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} ((1 - \nu)\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_3) \\ \sigma_2 = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\nu\varepsilon_1 + (1 - \nu)\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_3) \\ \sigma_3 = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\nu\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 + (1 - \nu)\varepsilon_3) \end{cases}$$



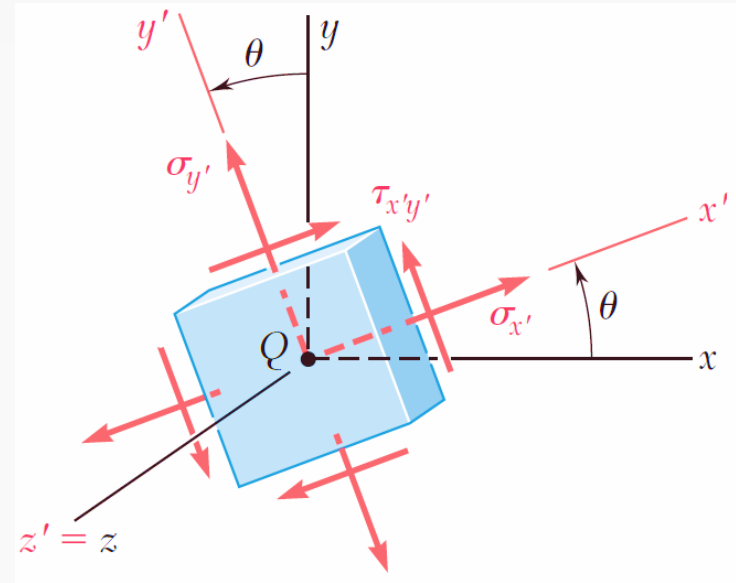
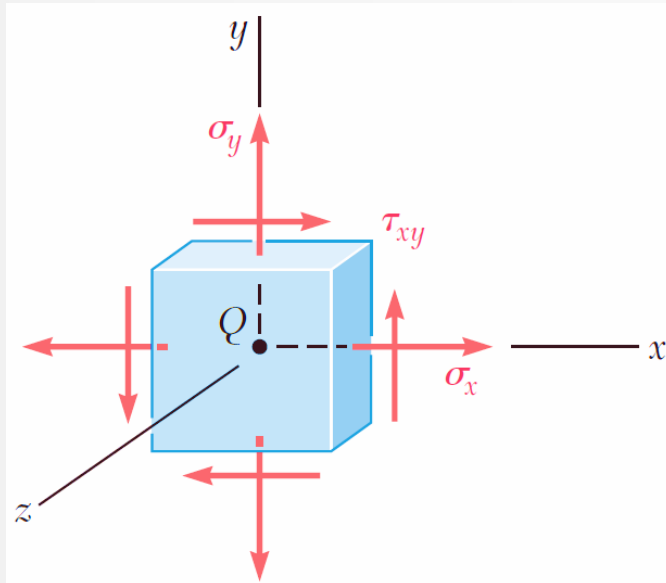
Análise bidimensional do estado de tensão

Em muitas das aplicações da teoria das tensões uma das direções principais é conhecida “a priori”, por exemplo a tensão numa placa fina sujeita a forças contidas no seu plano médio, os estados de tensão encontrados na maior parte das barras carregadas axialmente, veios de torção, barras, cascas, entre outras, correspondem ao chamado **estado de tensão plana**. Por consequência, a análise bidimensional faz-se no plano xy .

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

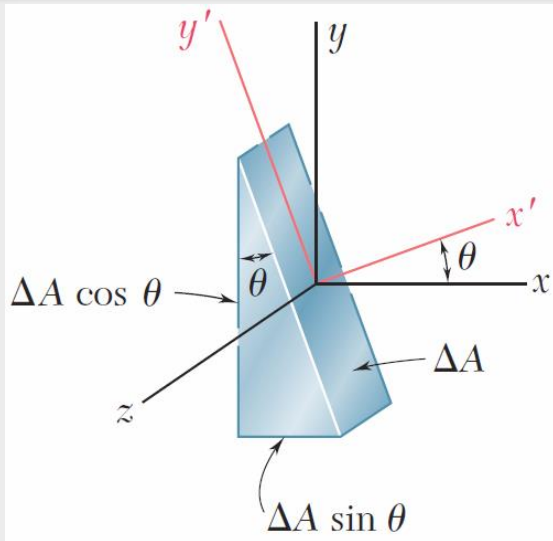
Ou seja,

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$





Tensões numa faceta arbitrariamente orientada

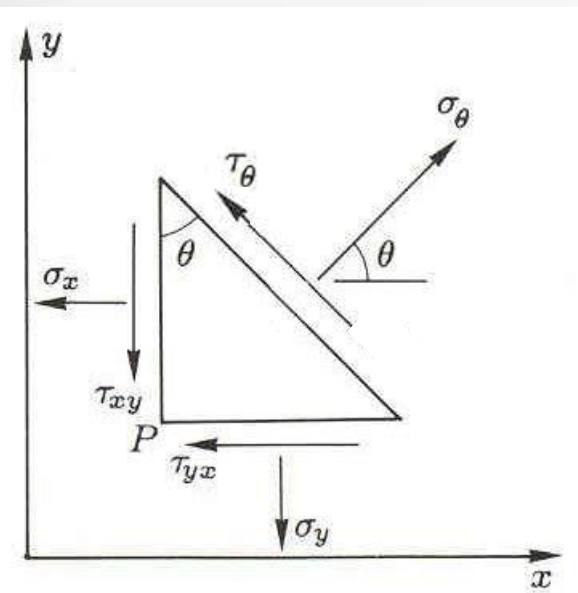


Considere-se um prisma triangular. Estabelecendo o equilíbrio das forças que atuam na direção θ (eixo x'), $\sum F_{x'} = 0$, obtém-se

$$\sigma_{\theta} \Delta A - \sigma_x (\Delta A \cos\theta) \cos\theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos\theta) \sin\theta - \sigma_y (\Delta A \sin\theta) \sin\theta - \tau_{yx} (\Delta A \sin\theta) \cos\theta = 0$$

Simplificando,

$$\sigma_{\theta} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta$$



Fazendo o equilíbrio das forças na direção perpendicular a direção θ (eixo y'), $\sum F_{y'} = 0$, obtém-se

$$\tau_{\theta} \Delta A + \sigma_x (\Delta A \cos\theta) \sin\theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos\theta) \cos\theta - \sigma_y (\Delta A \sin\theta) \cos\theta + \tau_{yx} (\Delta A \sin\theta) \sin\theta = 0$$

Simplificando,

$$\tau_{\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$



Tensões numa faceta arbitrariamente orientada

Como se vê, as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} permitem a determinação da tensão atuante numa faceta genérica definida pelo ângulo θ .

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta$$

$$\tau_\theta = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

Se se tiverem em conta as seguintes relações trigonométricas,

$$\sin\theta \cos\theta = \frac{\sin(2\theta)}{2} \quad \cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \quad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

Temos as seguintes expressões que nos fornecem as componentes normal e tangencial da tensão na faceta genérica θ , a partir das componentes do tensor das tensões.

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)$$
$$\tau_\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$



Tensões e direções principais

Com estas expressões podemos analisar a evolução de σ_θ com a orientação da faceta. Derivando a seguinte expressão em ordem a θ e igualando a zero,

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin(2\theta) + 2\tau_{xy} \cos(2\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{tg(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}} \Rightarrow \theta_p = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

Temos dois valores de θ_p que diferem de $\pi/2$ que nos dão um valor máximo e um valor mínimo de σ_θ o que vai corresponder $\tau_\theta = 0$.

Isto significa que temos duas direções ortogonais entre si que definem facetas em que a tensão tangencial é nula e a tensão normal atinge os seus valores máximo e mínimo.

Estas direções são as **direções principais** e os valores correspondentes da tensão normal são as **tensões principais**.

Designa-se a **tensão normal máxima** por σ_1 e a **tensão normal mínima** por σ_2 .



Tensões e direções principais

As tensões principais podem ser calculadas substituindo os valores de θ_{p1} e θ_{p2} na seguinte expressão.

$$tg(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \theta_{p1} \text{ e } \theta_{p2} \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \text{ sen}(2\theta)$$

Tendo em consideração as seguintes relações trigonométricas

$$\text{sen}(2\theta) = \frac{tg(2\theta)}{\pm\sqrt{1 + tg^2(2\theta)}}$$

$$\text{cos}(2\theta) = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + tg^2(2\theta)}}$$

Depois de alguns cálculos obtém-se,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix} \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$tg(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Tensão de Corte Máxima e direção

A determinação da tensão de corte máxima pode ser calculada analisando a evolução τ_θ com a orientação da faceta.

Derivando a seguinte expressão em ordem a θ e igualando a zero,

$$\tau_\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen}(2\theta) + \tau_{xy} \operatorname{cos}(2\theta)$$

$$\frac{\partial \tau_\theta}{\partial \theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{cos}(2\theta) - 2\tau_{xy} \operatorname{sen}(2\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}(2\theta_s) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}} \Rightarrow \theta_s = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \right)$$

O valor da tensão de corte máxima é determinado da mesma forma que σ_1 e σ_2

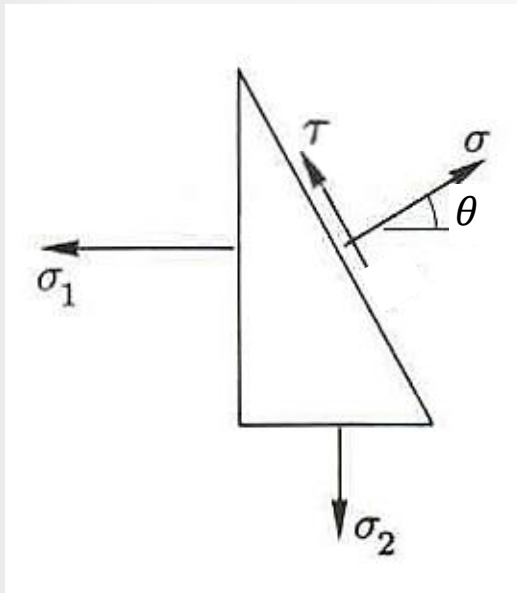
$$\boxed{\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}}$$



Circulo de Mohr 2D

Se o sistema de eixos de referência coincidir com as direções principais, a tensão tangencial será nula e as tensões normal e tangencial numa faceta arbitrariamente orientada serão dadas por,

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_1 \\ \sigma_y = \sigma_2 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\theta) \\ \tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\theta) \end{cases}$$



Em que θ é o ângulo que a normal á faceta faz com a direção principal 1.

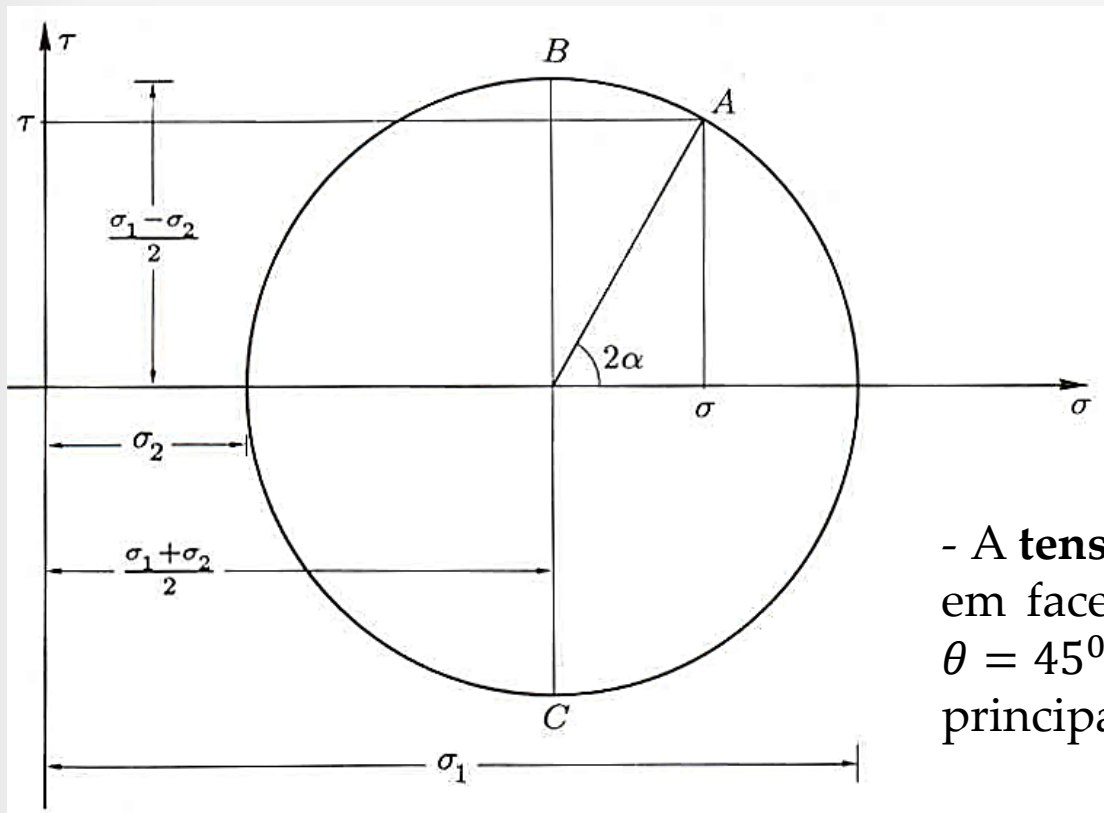
As expressões anteriores são as equações paramétricas de uma circunferência num referencial cartesiano $\sigma - \tau$.

Baseado neste facto, Otto Mohr desenvolveu um método gráfico para a representação do estado de tensão.



Círculo de Mohr 2D

Representação do círculo Mohr para o estado bidimensional de tensão.



Tensão de corte máxima

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

- A **tensão de corte máxima** ocorre em facetas que fazem ângulos de $\theta = 45^\circ$ com as direções principais (pontos B e C).

- O centro da circunferência tem as coordenadas:

$$\left(\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; 0 \right)$$

- Nas facetas onde ocorrem as tensões principais (pontos da circunferência sobre o eixo das abcissas) a tensão de corte é nula.



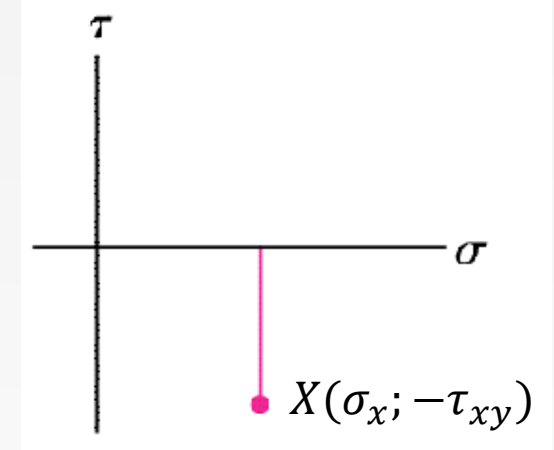
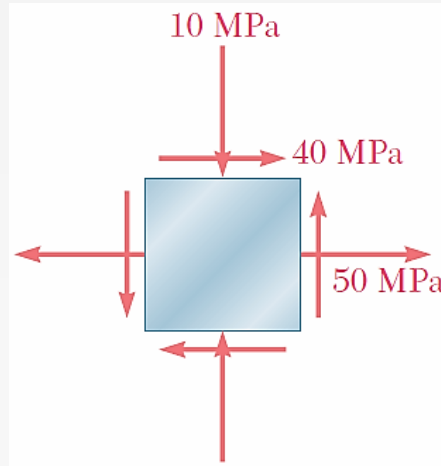
Circulo de Mohr - Convenção do sinal da tensão de Corte

- É indicado a no circulo de Mohr a **tensão de corte como Negativa** se o momento gerado por essa tensão de corte tiver o **sentido Anti-Horário**.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 50 & 40 \\ 40 & -10 \end{bmatrix} MPa$$

$$X(\sigma_x; -\tau_{xy}) = (50; -40)$$

$$Y(\sigma_y; \tau_{xy}) = (-10; 40)$$

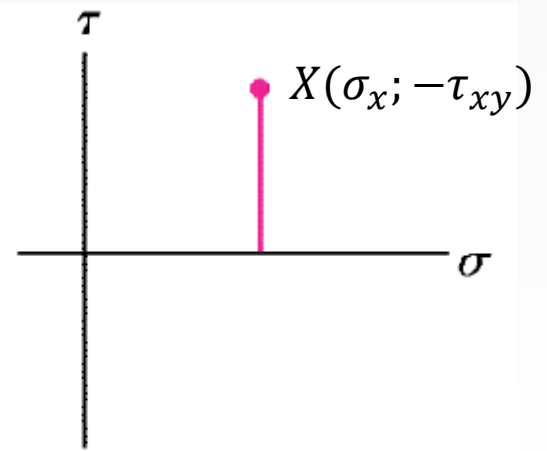
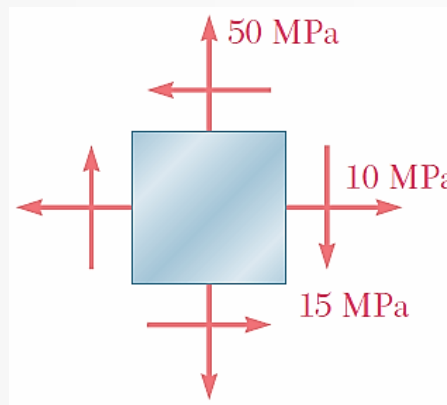


- É indicado a no circulo de Mohr a **tensão de corte como Positiva** se o momento gerado por essa tensão de corte tiver o **sentido Horário**.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 10 & -15 \\ -15 & 50 \end{bmatrix} MPa$$

$$X(\sigma_x; -\tau_{xy}) = (10; 15)$$

$$Y(\sigma_y; \tau_{xy}) = (50; -15)$$

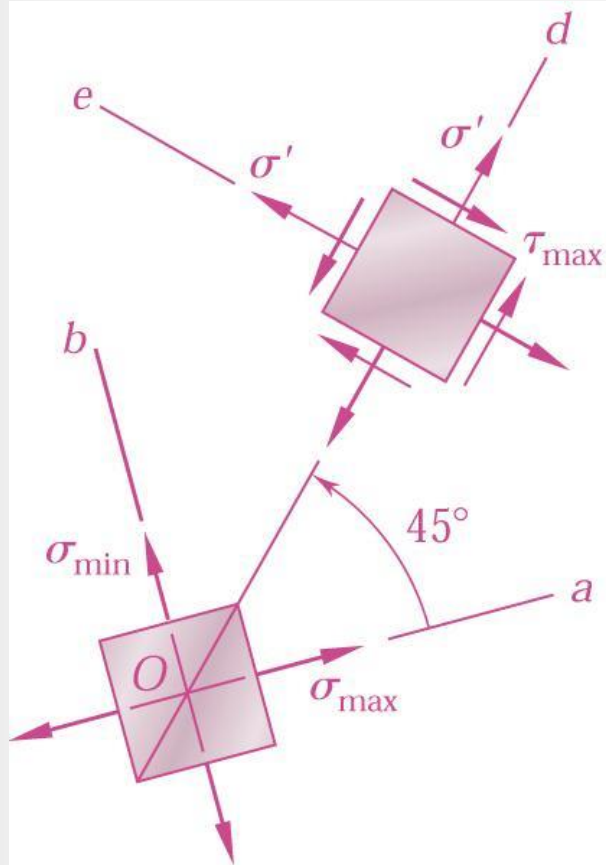




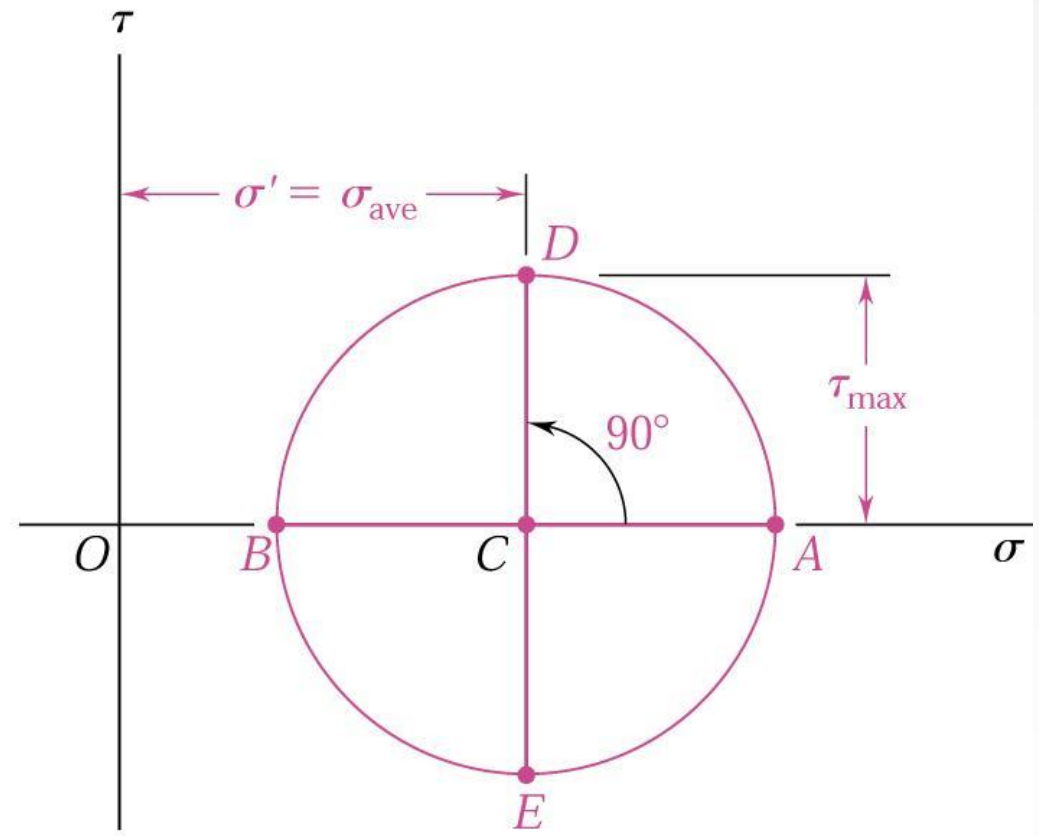
Circulo de Mohr – Exemplo 1

Capítulo 2

Resistência dos Materiais



(a)



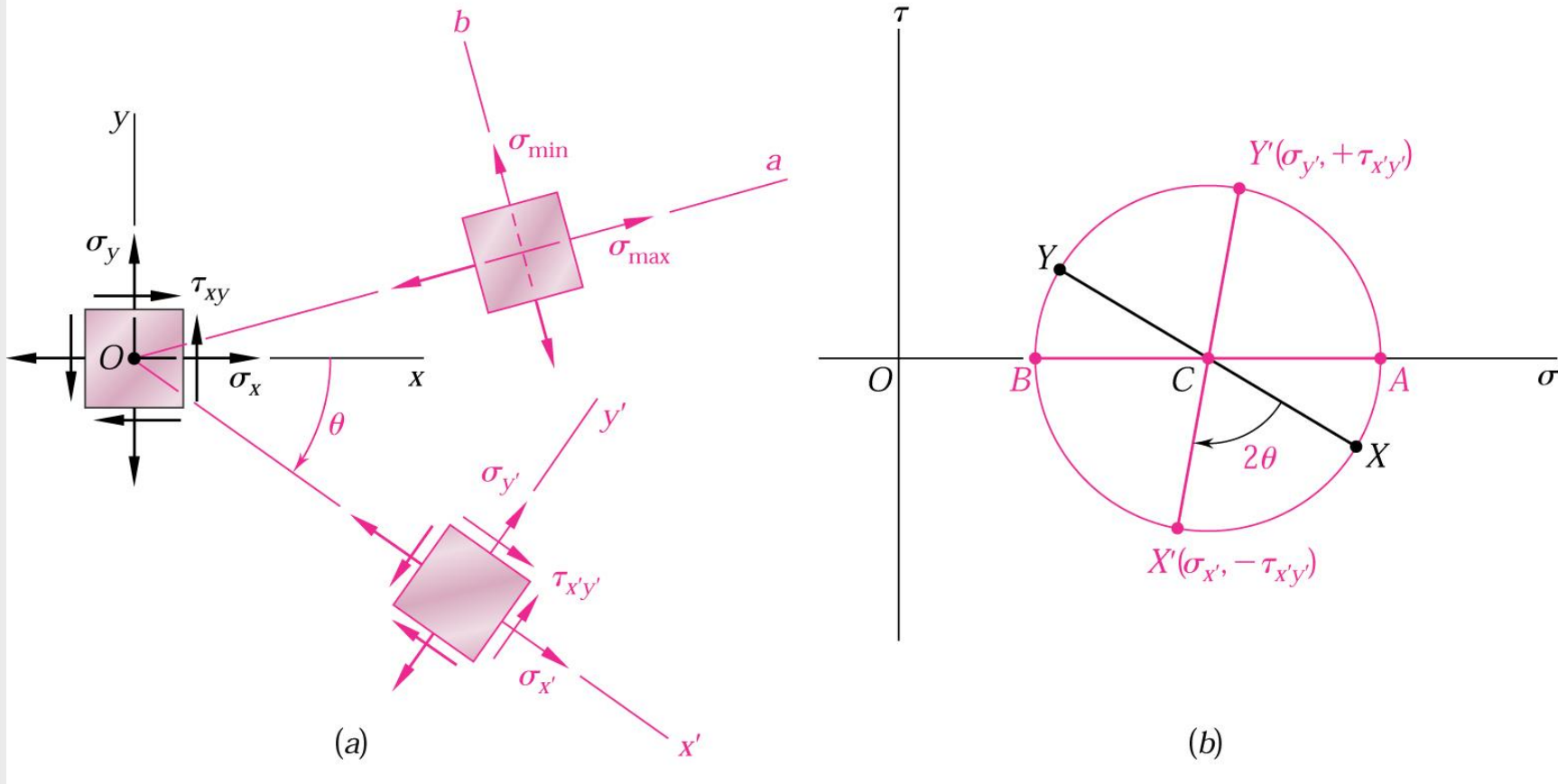
(b)



Círculo de Mohr – Exemplo 2

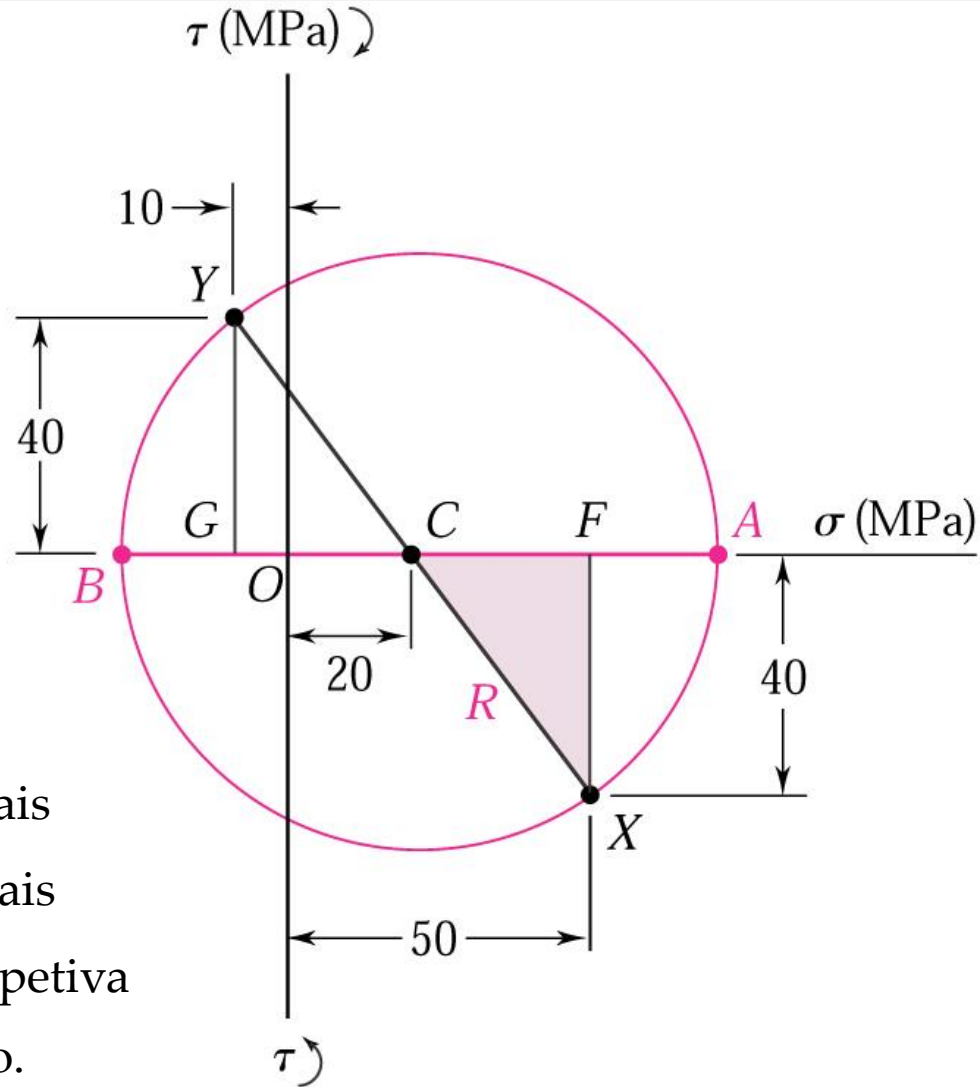
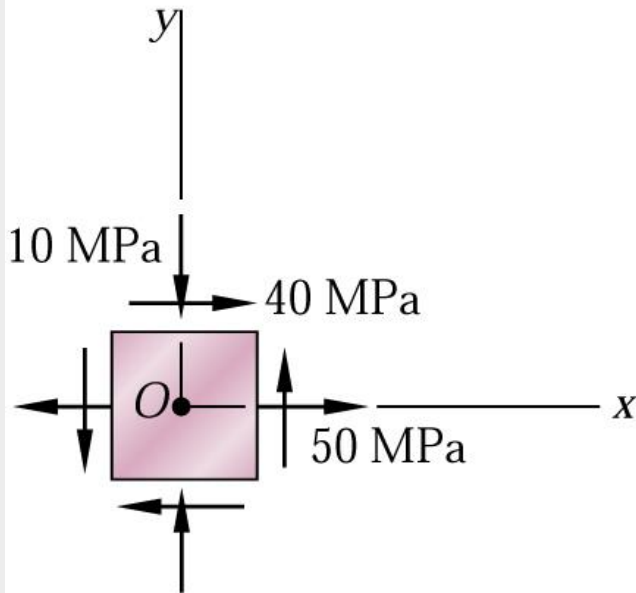
Capítulo 2

Resistência dos Materiais





Circulo de Mohr – Exemplo 3

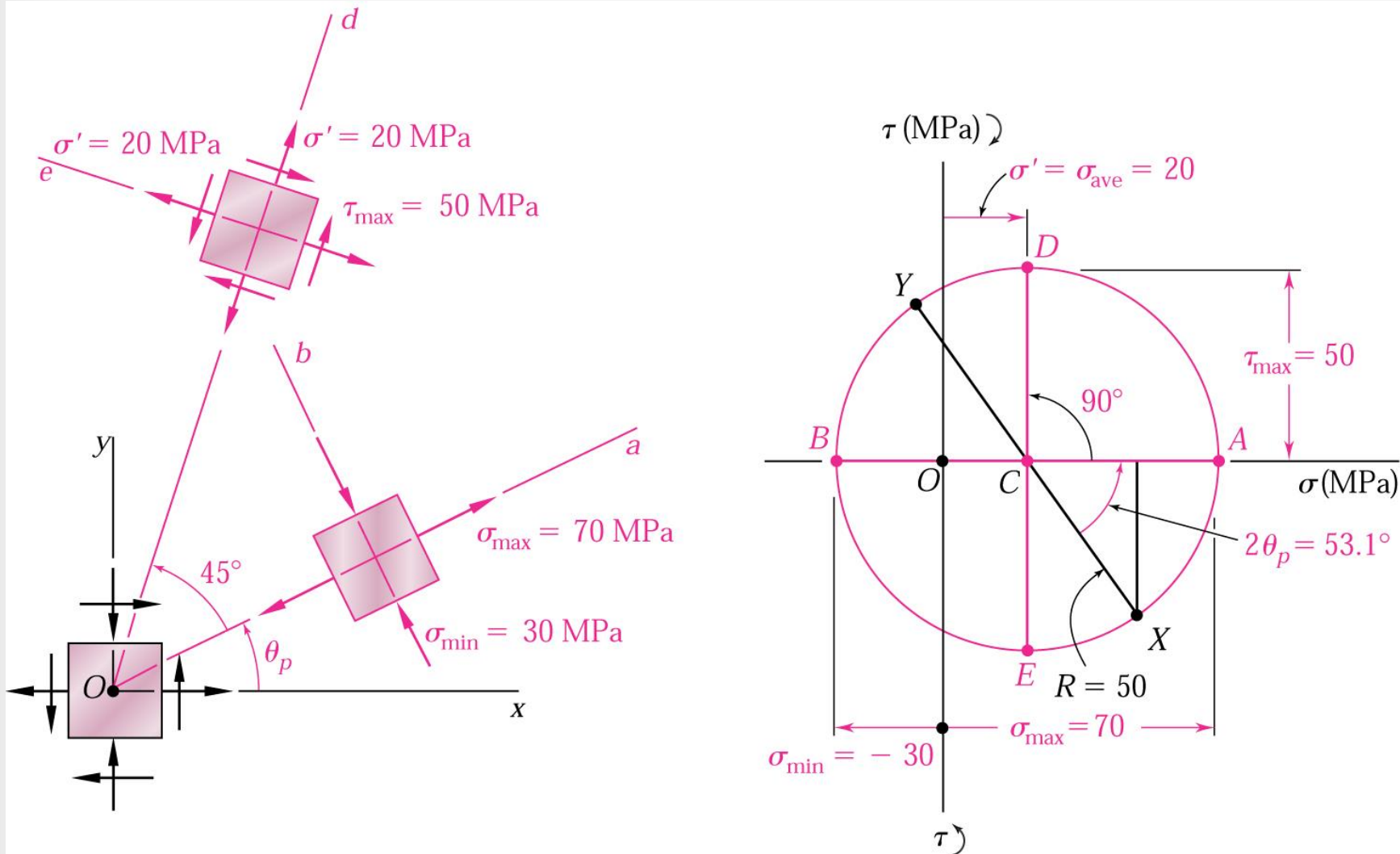


- Determinar as tensões principais
- Orientação dos planos principais
- Tensões de corte máxima e respetiva tensão normal e sua orientação.



Círculo de Mohr – Exemplo 3

Resolução pelo Círculo de Mohr





Circulo de Mohr – Exemplos 4 - Carga axial

Capítulo 2

Resistência dos Materiais

