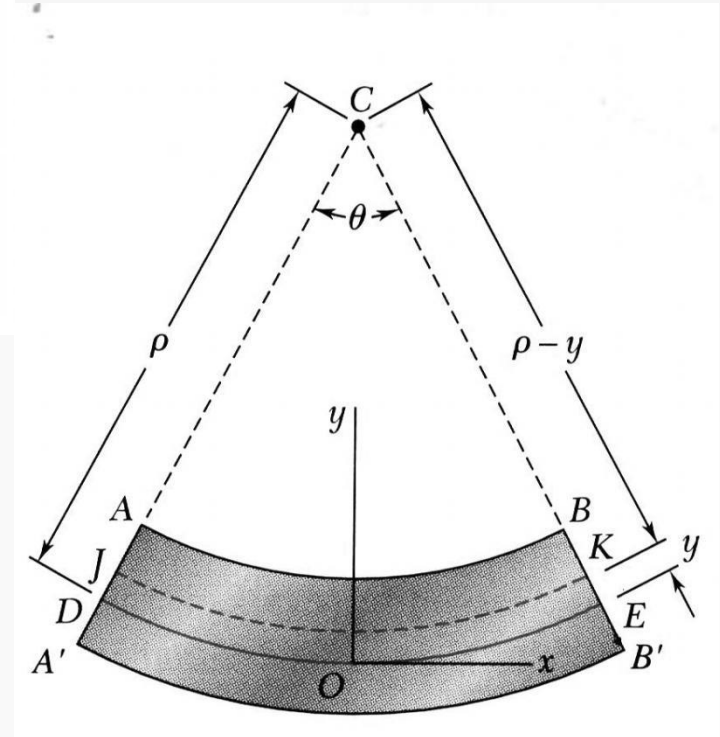
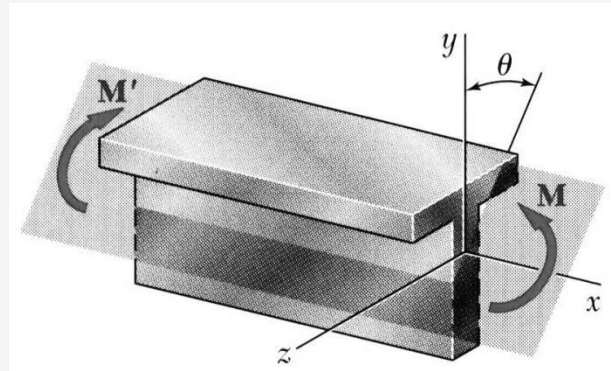
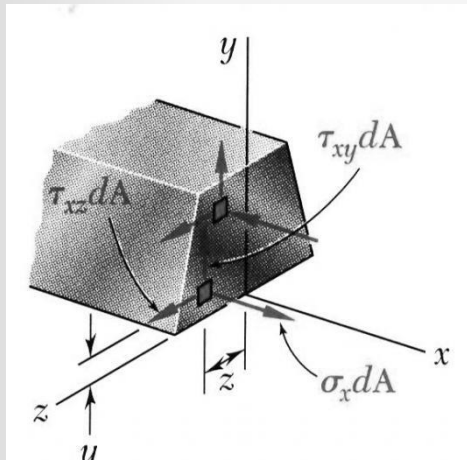


Resistência dos Materiais

Capítulo 4 - Flexão



Acetatos e imagens baseados nos livros:

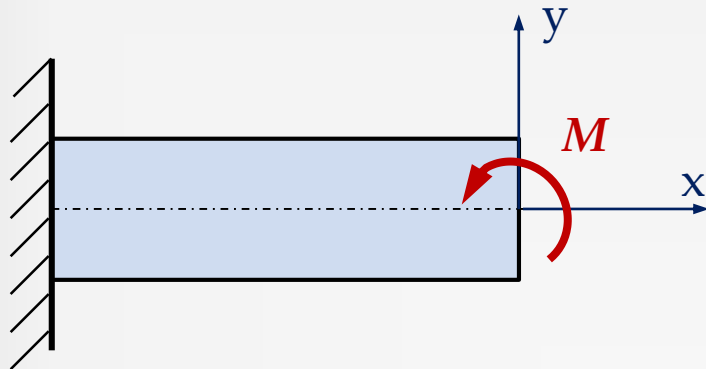
- Mechanics of Materials - Beer & Johnson
- Mecânica e Resistência dos Materiais – V. Dias da Silva
- Resistência dos Materiais, R.C. Hibbeler



- Flexão Pura
- Flexão Simples
- Flexão Composta
- Deformações por flexão
- Extensão devido a flexão
- Propriedades das secções de viga
- Deformações numa secção transversa
- Concentração de Tensões
- Flexão desviada
- Equação da Línea Elástica



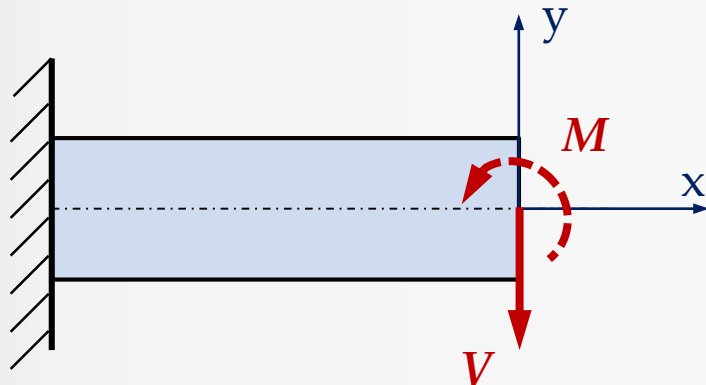
Flexão Pura e Flexão Simples



Flexão Pura

Quando os elementos prismáticos estão sujeitos apenas a **momentos fletores** iguais e opostos no mesmo plano.

$$M = \text{Constante}; \\ V = 0; N = 0; T = 0$$



Flexão Simples ou Flexão Transversal

Cargas transversais concentradas ou distribuídas produzem forças internas equivalentes a uma força de corte (**esforço transversal**) e a **momentos fletores**.

$$M \neq 0 \text{ ou } M = 0; \\ V \neq 0; N = 0; T = 0 \quad \left(\frac{dM}{dx} = V \right)$$



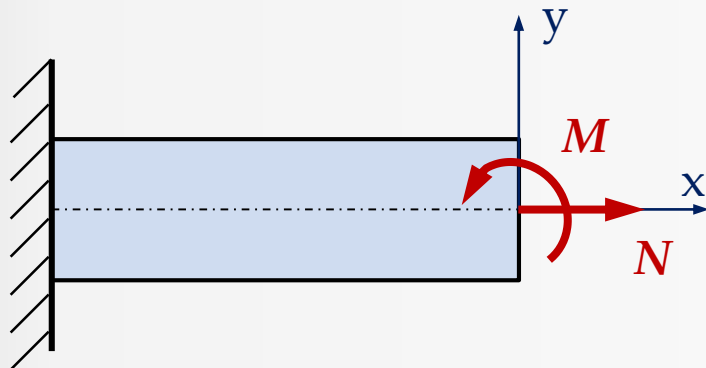
Flexão Pura Composta e Flexão Simples Composta

Capítulo 4

Flexão Composta

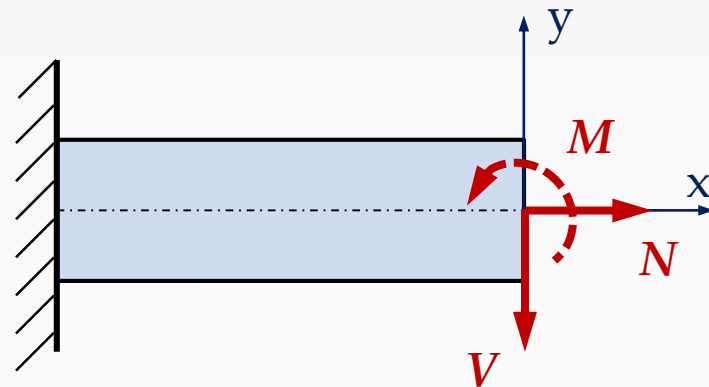
A tensão normal provocada por flexão pura pode ser composta com a tensão normal devido à carga axial e com a tensão devida ao carregamento de corte e/ou pelo momento fletor aplicado.

Flexão Pura Composta



$$M \neq 0;$$
$$V = 0; N \neq 0; T = 0$$

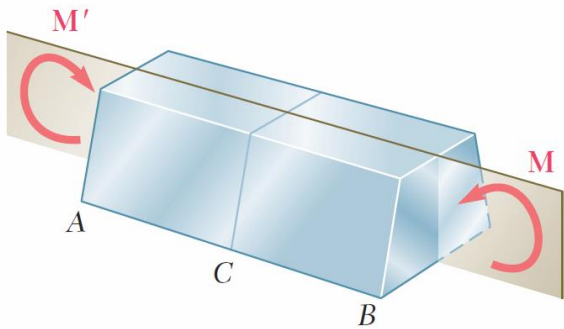
Flexão Simples Composta



$$M \neq 0 \text{ ou } M = 0;$$
$$V \neq 0; N \neq 0; T = 0$$

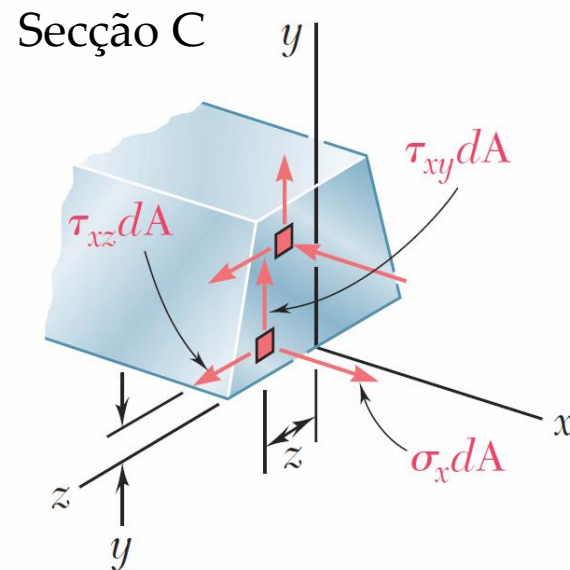
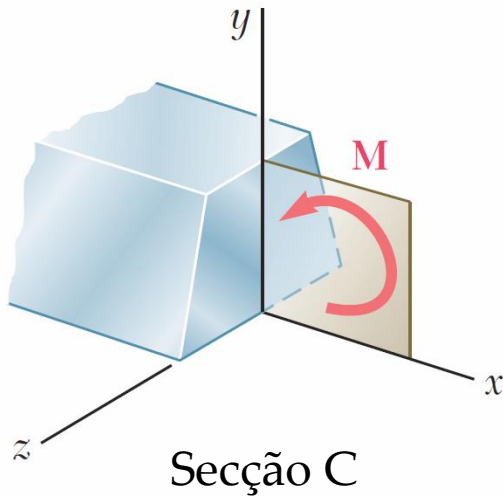


Flexão Pura – Equações de equilíbrio estático



Um binário $M-M'$ define-se como **dois momentos de igual intensidade** e sentidos opostos.

O momento M irá produzir uma distribuição de esforços $\sigma_x dA$ com a direção xx , produzindo assim na secção uma força resultante em xx , um momento segundo yy e outro momento segundo zz .

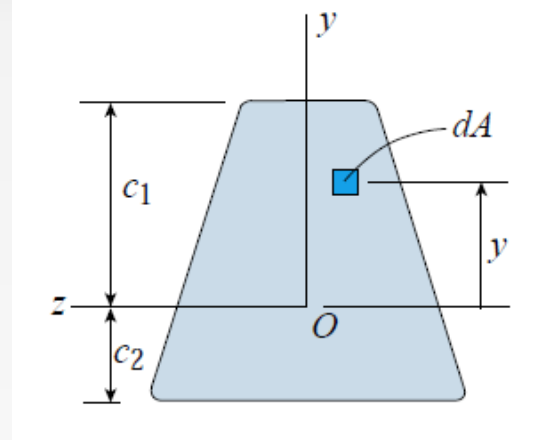
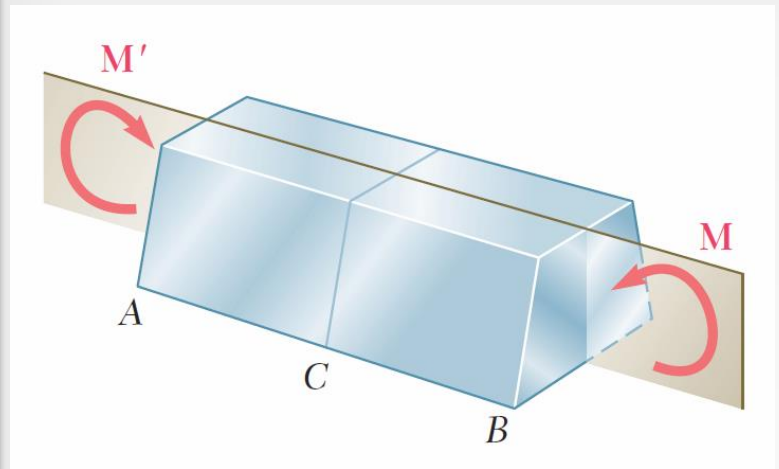


- A secção C está em equilíbrio estático logo os somatórios da resultante dos esforços são nulos:

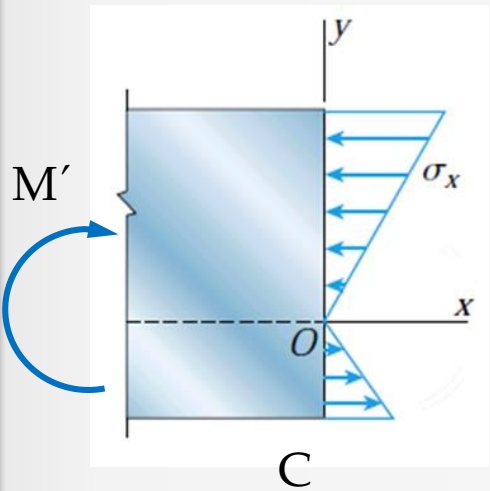
$$\sum F_x = 0 ; \sum M_y = 0 \text{ e } \sum M_z = 0$$



Flexão Pura – Equilíbrio estático – M_z



Secção C



- O parte do corpo AC está em equilíbrio estático. A outra parte CB vai desenvolver um perfil de **tensões normais de compressão (-) e tensões normais de tração (+)** ao longo da secção C.
- As tensões normais σ_x **são negativas** quando a coordenada y **for positiva**.

Equilíbrio de momentos no eixo zz

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \int_A y \sigma_x dA + M' = 0 \Rightarrow$$

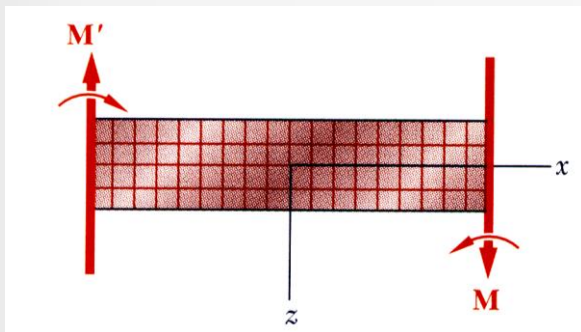
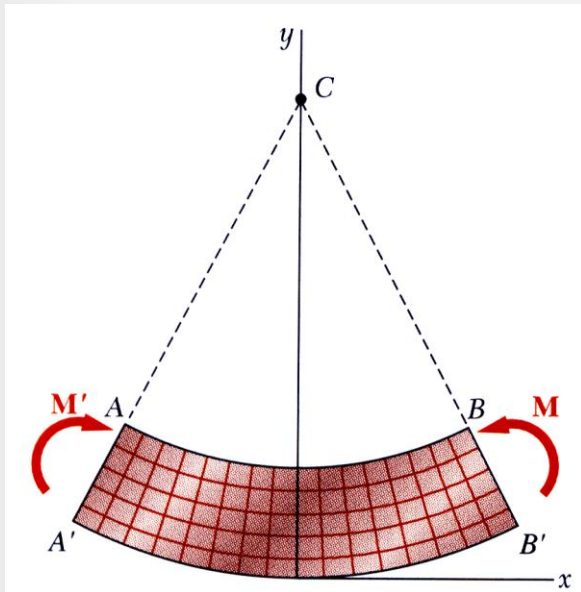
$$M = \int_A -y \sigma_x dA$$



Flexão Pura - Considerações

Capítulo 4

Resistência dos Materiais

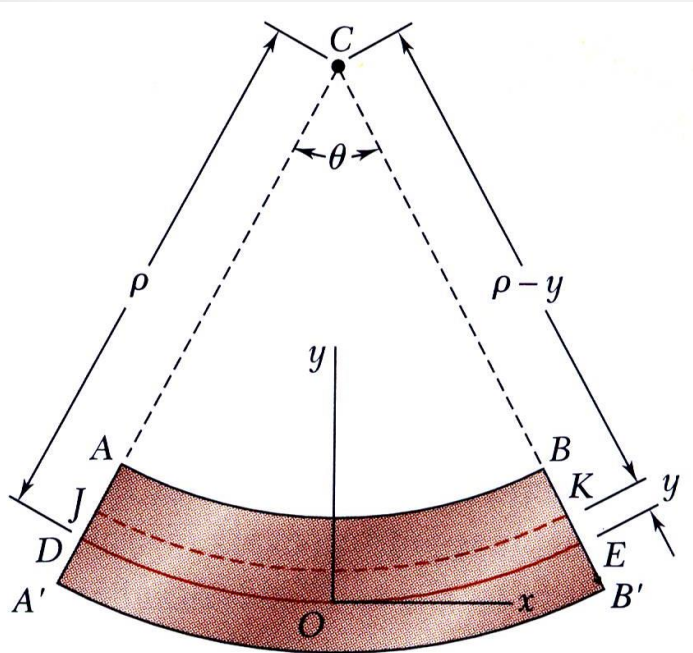


Viga com um plano de simetria em **flexão pura**:

- O elemento permanece simétrico;
- Flete uniformemente, formando um arco circular;
- A curvatura em todos os pontos da barra é a mesma;
- O plano transversal passa pelo centro do arco, mantendo-se plano;
- O comprimento AB diminui, enquanto o de $A'B'$ aumenta;
- Existe uma superfície neutra (fibra neutra), paralela às superfícies superior e inferior e para a qual não se verifica alteração do comprimento;
- As tensões e extensões são negativas (compressão) acima da fibra neutra e positivas (tração) abaixo;



Flexão Pura – Campo de Deslocamentos e Extensão



Considerar um segmento de viga de comprimento L .
 Após deformação, o comprimento da superfície neutra permanece inalterável.
 Nas restantes secções temos:

Deslocamento $L = \rho\theta$ $L' = (\rho - y)\theta$

$$\boxed{\delta_x = L' - L} = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

Extensões

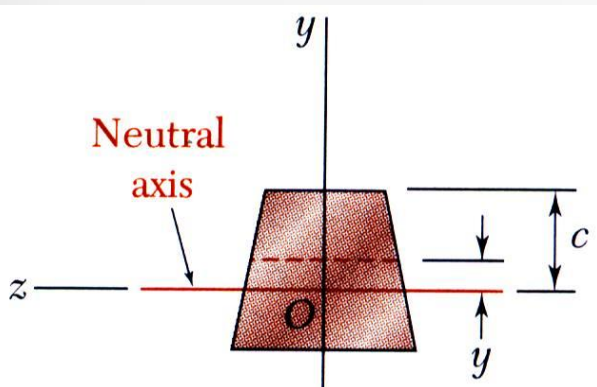
$$\boxed{\epsilon_x = \frac{\delta_x}{L}} = -\frac{y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

$$\epsilon_{max} = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{c}{\epsilon_{max}} \Rightarrow \epsilon_x = -\frac{y}{c}\epsilon_{max}$$

c – distância entre a **fibra neutra** e a **fibra mais afastada**

$$\boxed{\epsilon_x = -\frac{y}{\rho}}$$

A extensão varia linearmente com a coordenada y



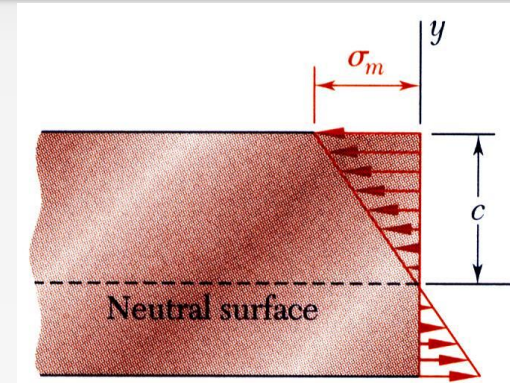


Flexão Pura – Tensão normal

Num material linear-elástico, temos

$$\boxed{\sigma_x = E \varepsilon_x} = -\frac{y}{c} E \varepsilon_{max} \Rightarrow \sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_{max}$$

A tensão varia linearmente com a coordenada y



Pelo equilíbrio estático, $\sum F_x = 0$

$$\sum F_x = \int_A \sigma_x dA = 0$$

$$\sum F_x = \int_A -\frac{y}{c} \sigma_{max} dA = 0$$

$$\sum F_x = -\frac{\sigma_{max}}{c} \int_A y dA = 0$$

O 1º momento relativo ao plano neutro é zero. Portanto a superfície neutra tem de passar pelo centroide da secção.

Pelo equilíbrio estático, $\sum M_z = 0$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M = \int_A -y \sigma_x dA$$

$$M = \int_A -y \left(-\frac{y}{c} \sigma_{max} \right) dA$$

$$M = \frac{\sigma_{max}}{c} \int_A y^2 dA = \frac{\sigma_{max}}{c} I_z \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{Mc}{I_z}}$$

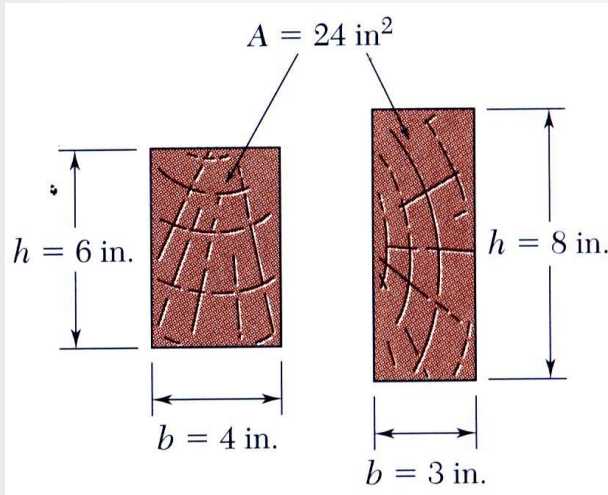
$$\sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_{max} \Rightarrow \sigma_x = -\frac{y}{c} \frac{Mc}{I_z}$$

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{My}{I_z}}$$

I_z – momento de inercia



Vigas - Módulo de elasticidade da secção



A **tensão normal máxima** provocada por flexão é dada por:

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I_z} = \frac{M}{S}$$

S – módulo de elasticidade da secção

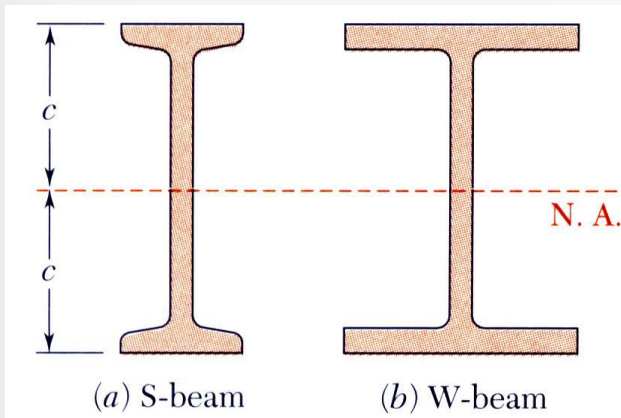
Uma viga com maior S terá, logicamente, menor valor de tensão máxima.

Considerando uma viga retangular,

$$S = \frac{I_z}{c} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}Ah$$

Entre 2 vigas retangulares com igual área transversal, a que possuir maior h terá maior capacidade de resistência à flexão.

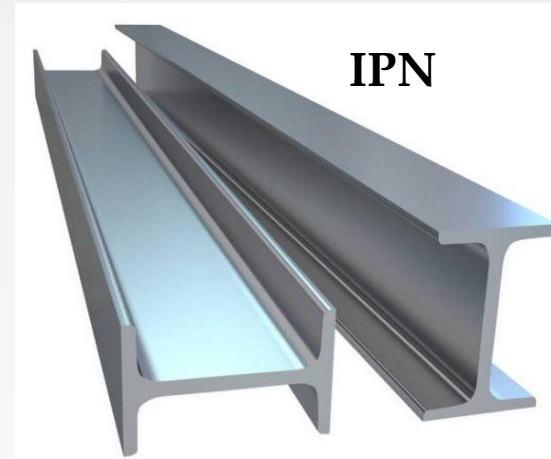
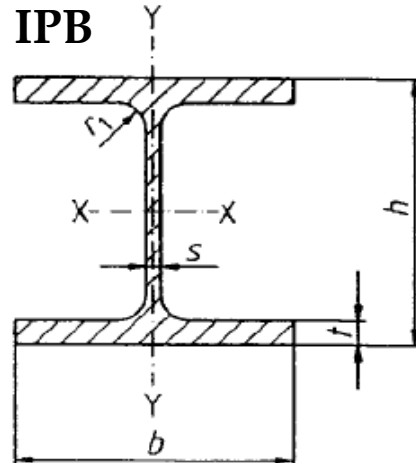
Os perfis normalizados (I, H, U, etc.) são projetados para possuir elevados valores de S .





Vigas - Propriedades de perfis normalizados

Norma
DIN 1025



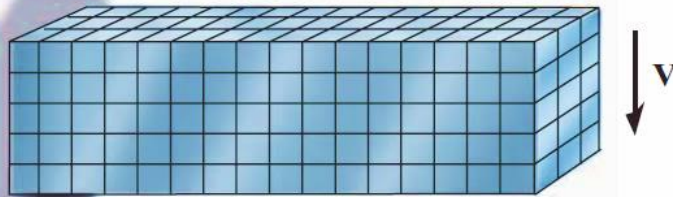
Section symbol*)	Dimensions for					Section area, in cm ²	Mass, in kg/m	Surface area, in m ² /m	Static parameters 1)					
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>r₁</i>				<i>x-x</i>			<i>y-y</i>		
IPB									<i>I_x</i> cm ⁴	<i>S_x</i> cm ³	<i>i_x</i> cm	<i>I_y</i> cm ⁴	<i>S_y</i> cm ³	<i>i_y</i> cm
100	100	100	6	10	12	26,0	20,4	0,567	450	89,9	4,16	167	33,5	2,53
120	120	120	6,5	11	12	34,0	26,7	0,686	864	144	5,04	318	52,9	3,06
140	140	140	7	12	12	43,0	33,7	0,805	1 510	216	5,93	550	78,5	3,58
160	160	160	8	13	15	54,3	42,6	0,918	2 490	311	6,78	889	111	4,05
180	180	180	8,5	14	15	65,3	51,2	1,04	3 830	426	7,66	1 360	151	4,57



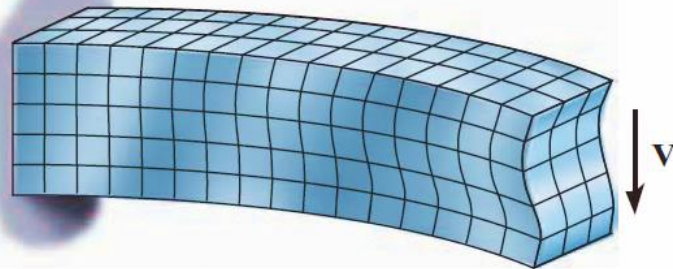
Flexão Simples ou Flexão Transversal – esforço transversal

Capítulo 4

Resistência dos Materiais



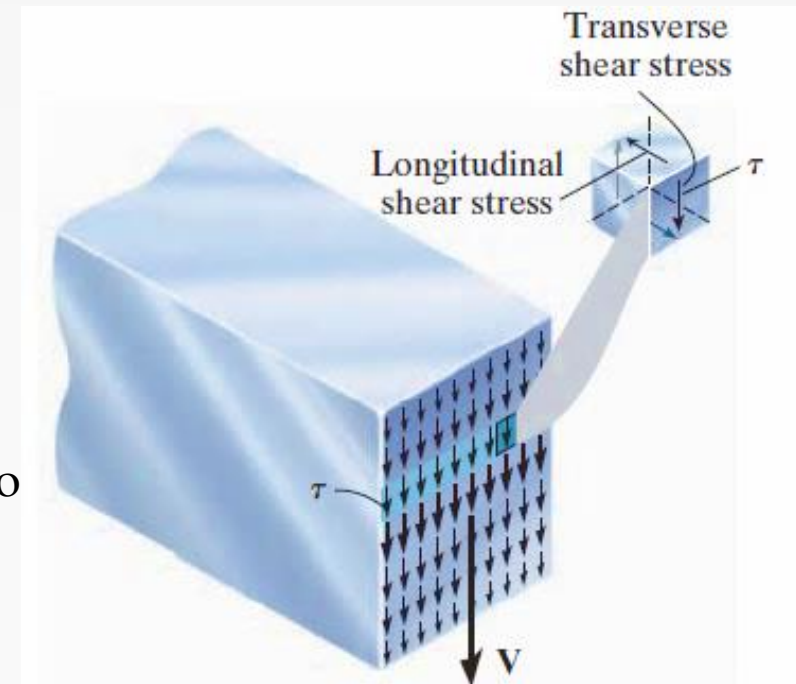
(a) Before deformation



(b) After deformation

Esforço Transverso

As estruturas sujeitas ao esforço de corte sofrem internamente tensões de corte que variam ao longo da sua seção.



Quando o esforço transversal é significativo as secções já não se mantêm planas.

A tensão de corte é **geralmente ignorada** quando a razão entre comprimento e a altura da viga for igual ou superior a 10.

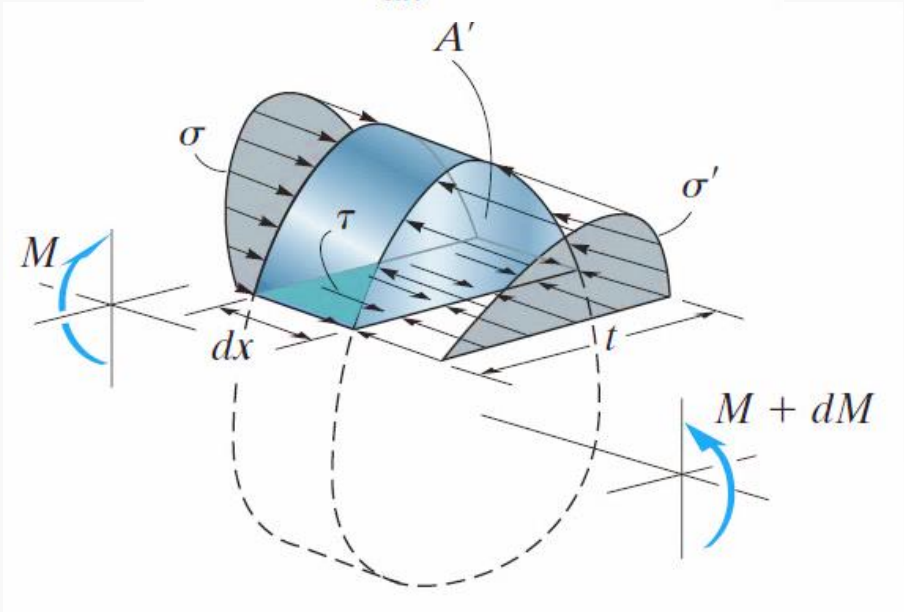
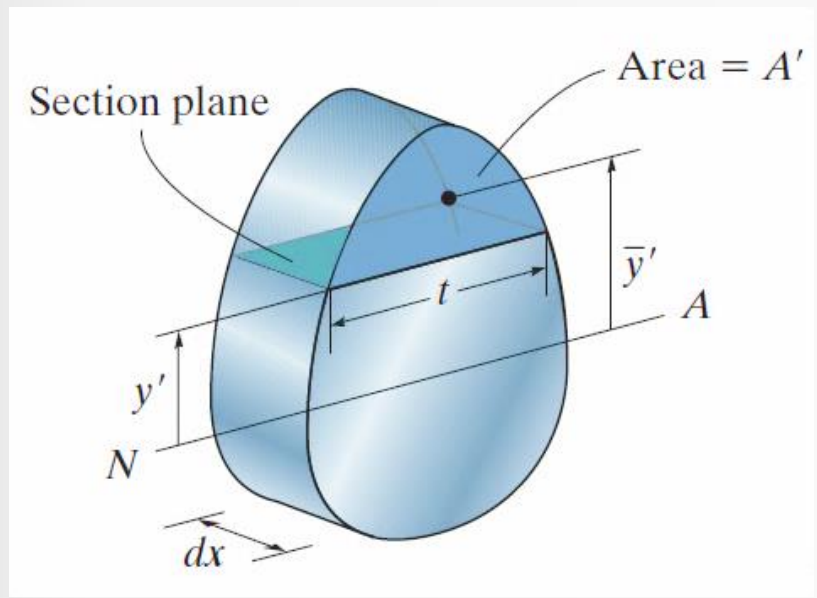
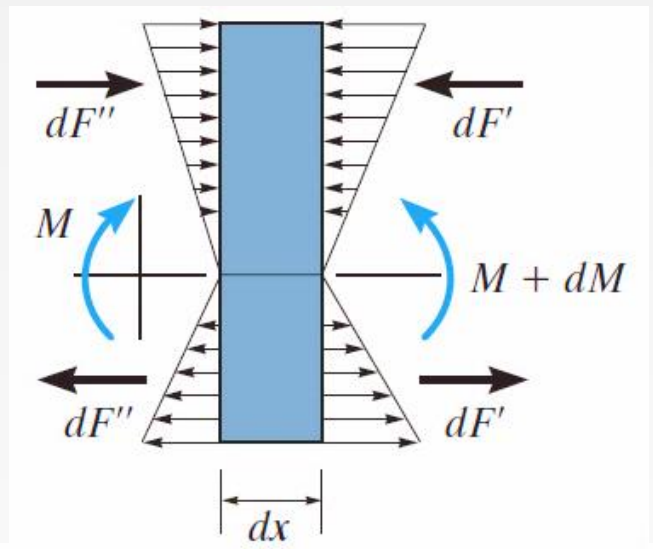
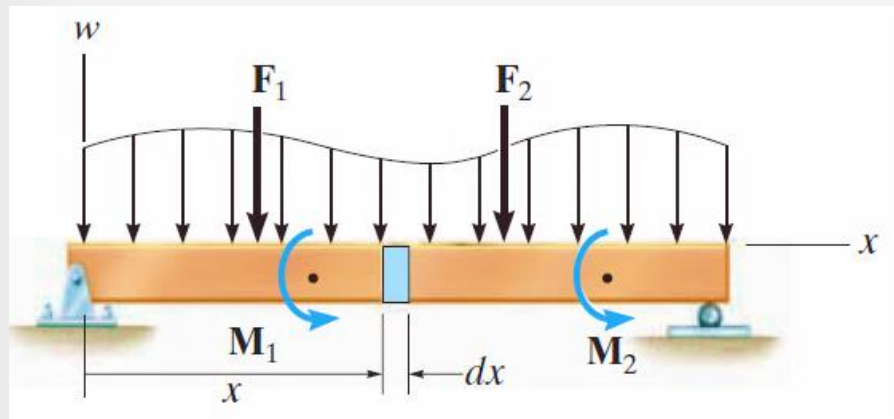


Flexão Simples ou Flexão Transversal – esforço transversal

Capítulo 4

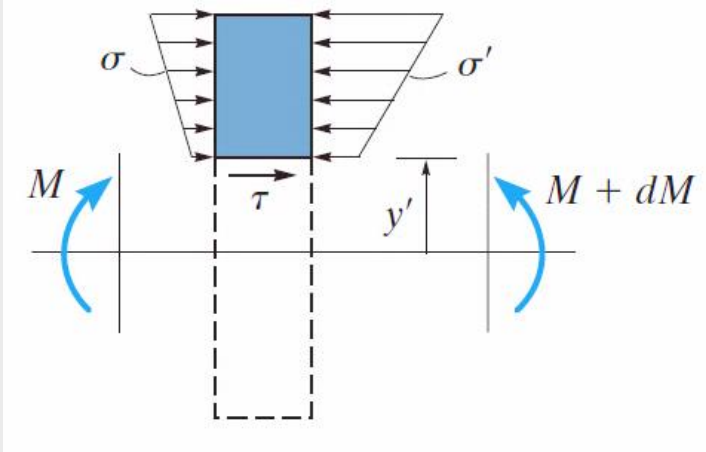
Resistência dos Materiais

Determinação das tensões de corte.





Flexão Simples ou Flexão Transversal – esforço transversal



Fazendo o equilíbrio das forças, $\sum F_x = 0$

$$\tau(tdx) + \int_{A'} \sigma dA' - \int_{A'} \sigma' dA' = 0 \Rightarrow$$

$$\tau(tdx) = - \int_{A'} \left(\frac{M}{I_z} \right) y dA' + \int_{A'} \left(\frac{M + dM}{I_z} \right) y dA'$$

$$\Rightarrow \tau(tdx) = \left(\frac{dM}{I_z} \right) \int_{A'} y dA' \Rightarrow \tau = \frac{1}{t I_z} \left(\frac{dM}{dx} \right) \int_{A'} y dA'$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$Q = \int_{A'} y dA' = \bar{y}' A'$$

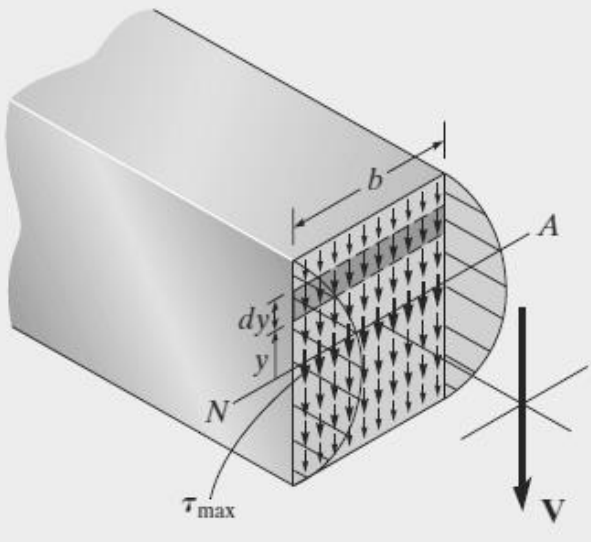
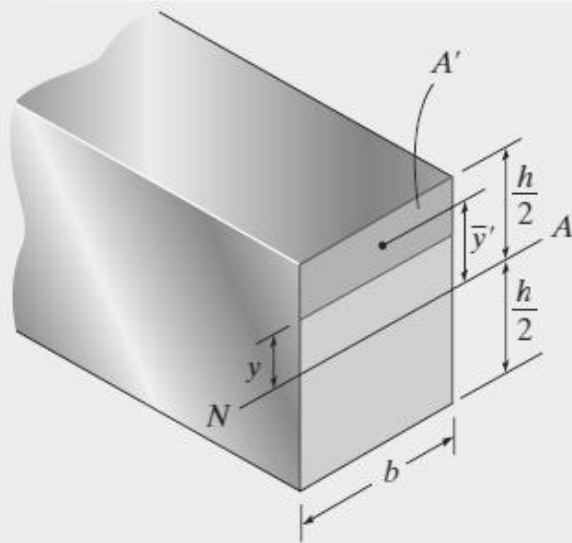
Momento estático de Inercia da figura plana em relação a linha neutra

$$\tau = \frac{VQ}{t I_z}$$



Flexão Simples ou Flexão Transversal – esforço transversal

Vigas de secção retangular



Momento estático de Inercia

$$Q = \bar{y}' A' = \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] \left(\frac{h}{2} - y \right) b$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) b \quad I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$\tau = \frac{VQ}{t I_z} = \frac{6V}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

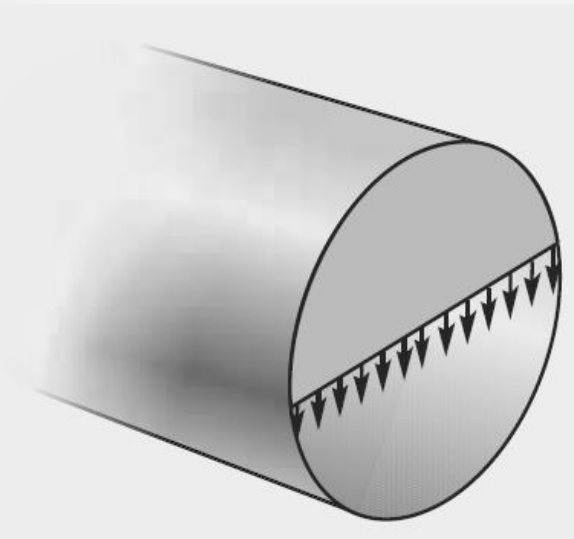
A distribuição da tensão de corte é parabólica.
A tensão de corte é máxima em $y = 0$.

$$\tau_{max} = \frac{3V}{2A}$$



Flexão Simples ou Flexão Transversal – esforço transversal

Vigas de secção circular



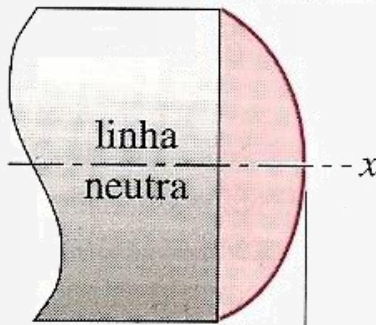
Momento estático
de Inercia

$$Q = \bar{y}' A' = \frac{2}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}$$

Momento de Inercia

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$\tau = \frac{VQ}{t I_z} = \frac{4}{3} \frac{V}{\pi R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$



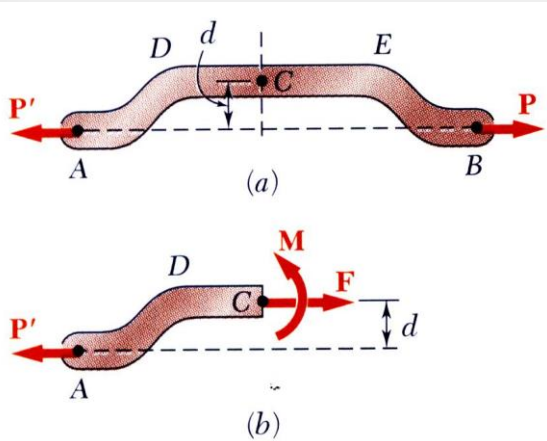
$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{V}{A}$$

A distribuição da tensão de corte é parabólica.
A tensão de corte é máxima em $r = 0$.

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{V}{A}$$



Flexão Pura Composta



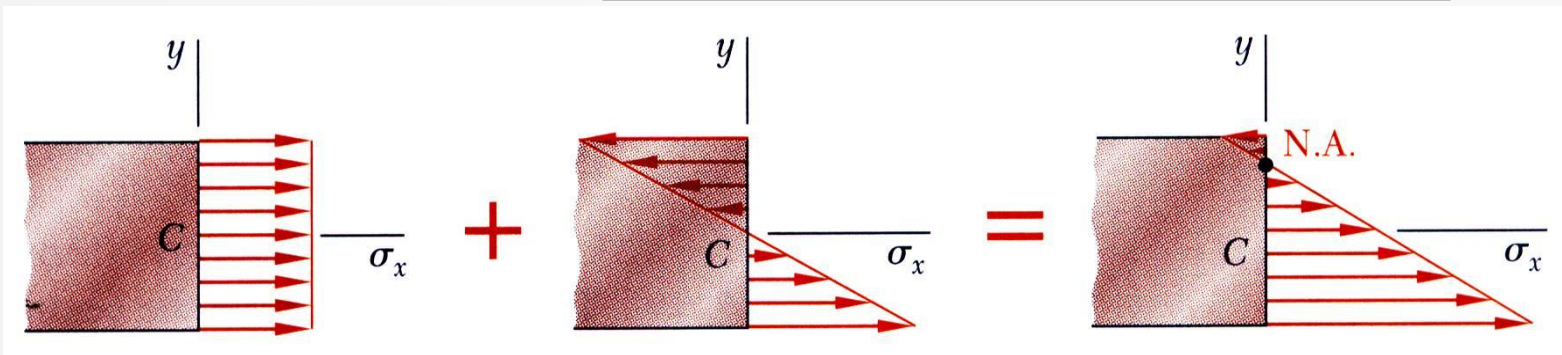
$M \neq 0; V = 0; N \neq 0; T = 0$

A distribuição de tensão devida a cargas excêntricas é **determinada por sobreposição** de:

- distribuição uniforme devida à carga centrada;
- distribuição linear devida ao momento fletor;

Carregamento Excêntrico: $F = P$ $M_z = Pd$

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{axial} + (\sigma_x)_{flexão} = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z}$$



A validade deste resultado requer que:

- as tensões fiquem abaixo do limite proporcionalidade;
- as deformações tenham efeito desprezável na geometria;
- as tensões não sejam determinadas na vizinhança dos pontos de aplicação da força;



Flexão Pura Desviada

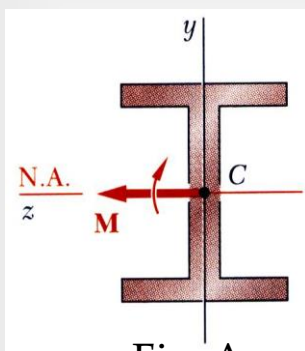


Fig. A

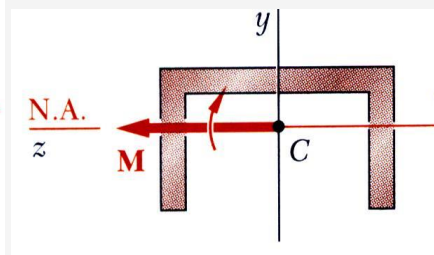


Fig. B

- Até agora, a análise de flexão pura esteve limitada a elementos sujeitos a momentos fletores que **atuam num plano de simetria do elemento** (Fig. A e B).
- Os elementos permanecem simétricos e **fletem no plano de simetria**.

- O **eixo neutro** da secção coincide com o eixo do momento.

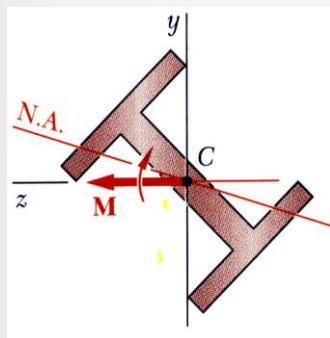


Fig. C

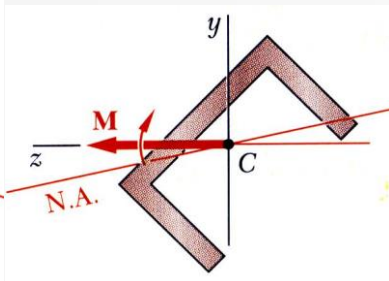


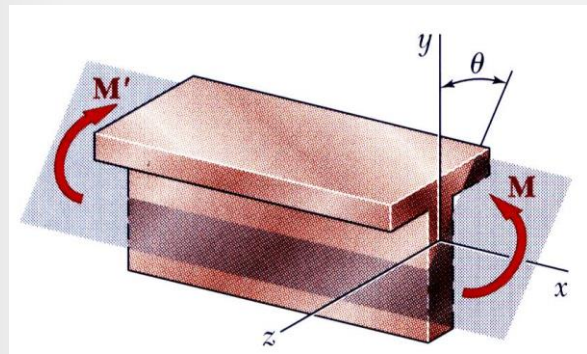
Fig. D

- Consideramos agora situações em que os **momentos não atuam num plano de simetria do elemento** (Fig. C e D).

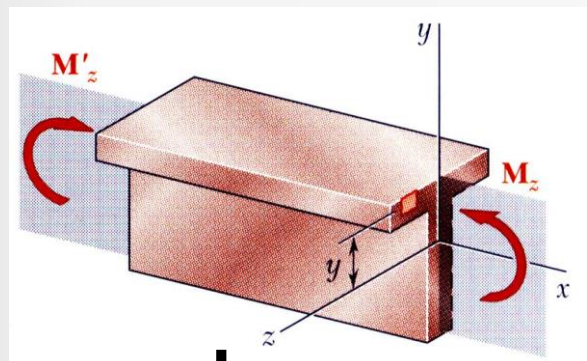
- **Não se pode assumir** que o elemento irá fletir segundo o plano do momento.
- Nestas situações, geralmente, a **fibra neutra da secção não coincide com o eixo do momento**.



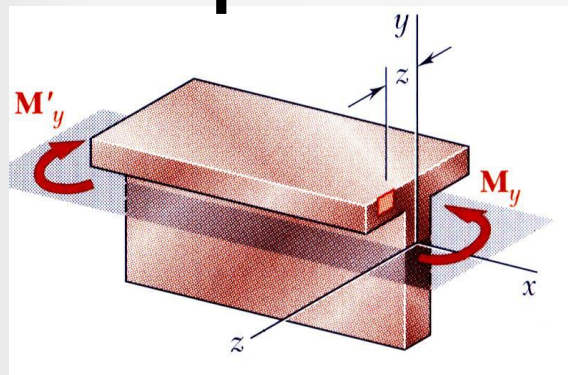
Flexão Pura Desviada



=



+



O **princípio da sobreposição** é aplicado para determinar a distribuição de tensões na situação mais geral de Flexão Pura desviada.

Decompor o momento nas respectivas componentes segundo cada uma das direções:

$$M_z = M \cos(\theta) \quad M_y = M \sin(\theta)$$

Associar as tensões existentes em cada direção:

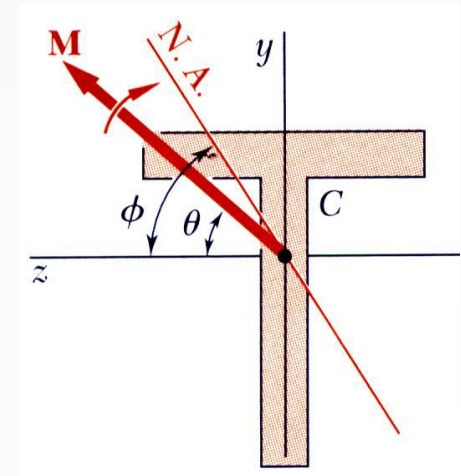
$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

No **linha neutro** temos, $\sigma_x = 0$

$$-\frac{M \cos(\theta) y}{I_z} + \frac{M \sin(\theta) z}{I_y} = 0$$

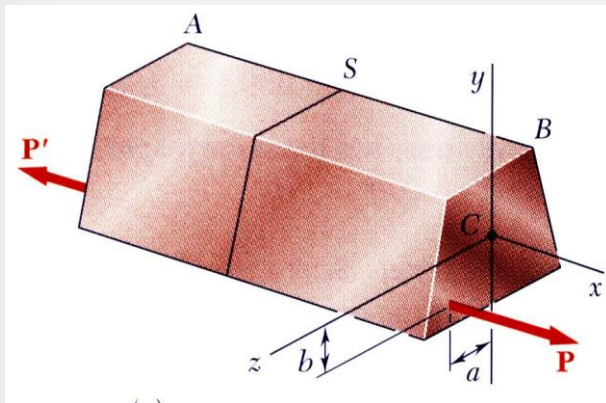
$$\Rightarrow \frac{I_z \sin(\theta)}{I_y \cos(\theta)} = \frac{y}{z} = \tan(\phi)$$

$$y = \frac{I_z}{I_y} \tan(\theta) \cdot z$$





Flexão Pura Composta Desviada

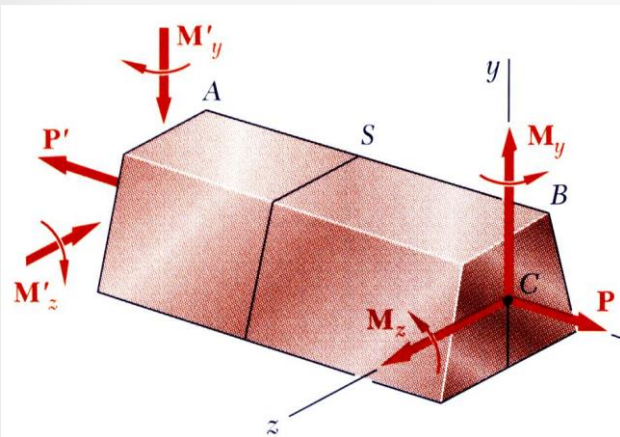


- Considerar um elemento reto sollicitado por forças excêntricas iguais e opostas.
- Por equilíbrio estático, a força excêntrica é equivalente a uma força centrada e a dois momentos:

$$P - \text{Carga concentrada} \quad M_y = Pa \quad M_z = Pb$$

Pelo **princípio da sobreposição**, a distribuição de tensões é dada por:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$



Como a **linha neutra** $\sigma_x = 0$ pode ser determinada segundo:

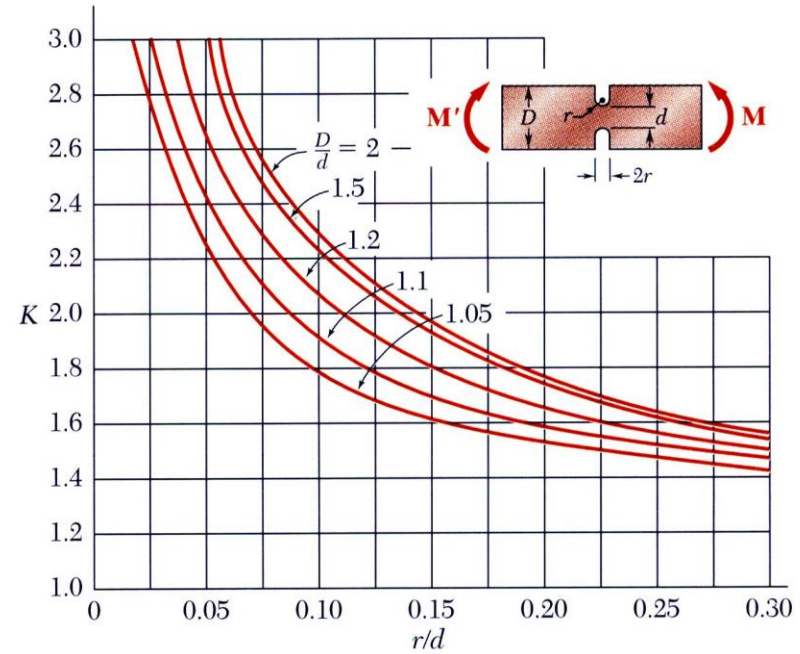
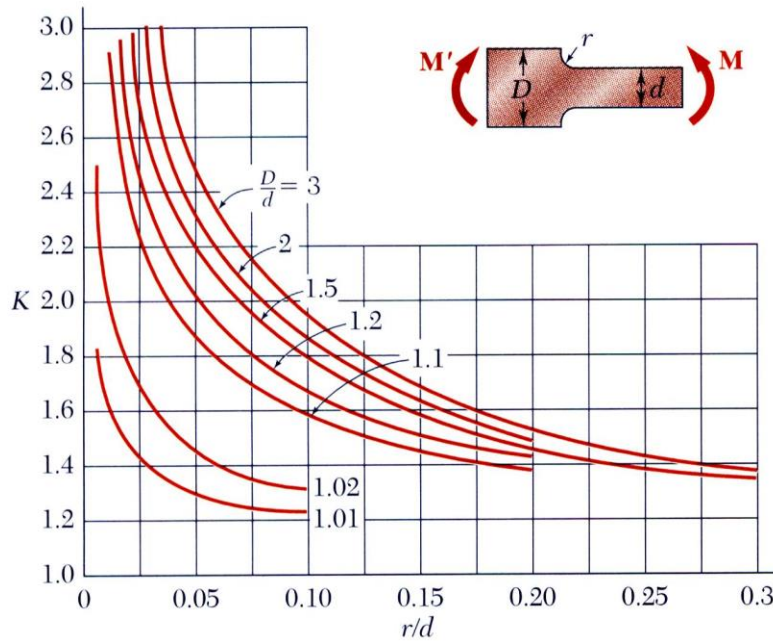
$$\frac{M_z y}{I_z} = \frac{P}{A} + \frac{M_y z}{I_y} \Rightarrow y = \frac{I_z M_y}{I_y M_z} z + \frac{P I_z}{A M_z}$$



Concentração de Tensões

Capítulo 4

Resistência dos Materiais



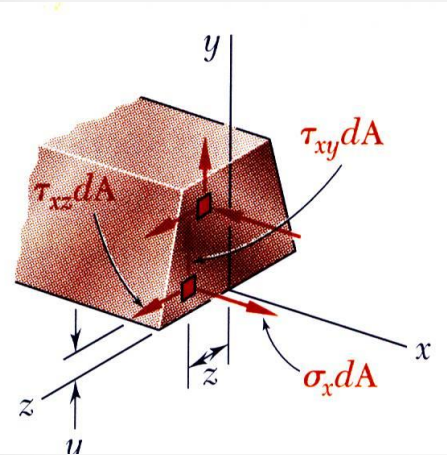
A concentração de tensões pode ocorrer:

- Na vizinhança dos pontos onde os esforços são aplicados;
- Na vizinhança de variações bruscas de secção;

$$\sigma_{max} = K_t \frac{Mc}{I}$$



Equação da Linha Elástica



Retomando o equilíbrio estático na secção e a extensão segundo o eixo x , temos;

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad \sigma_x = E\epsilon_x$$

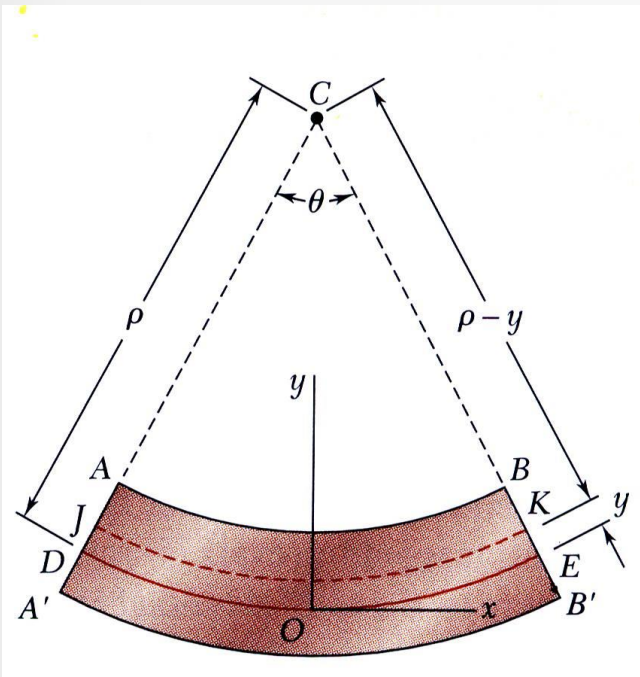
$$\sigma_x = -\frac{Ey}{\rho} \quad M_z = \int_A -y\sigma_x dA$$

$$M_z = \int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA = \frac{EI_z}{\rho} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}}$$

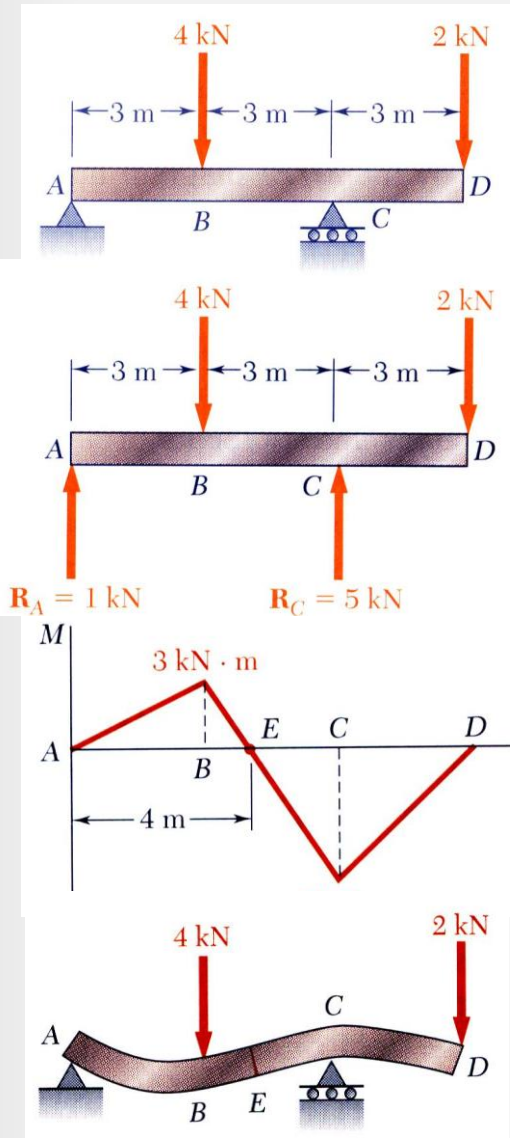
$\frac{1}{\rho}$ - Curvatura

ρ - Raio de curvatura

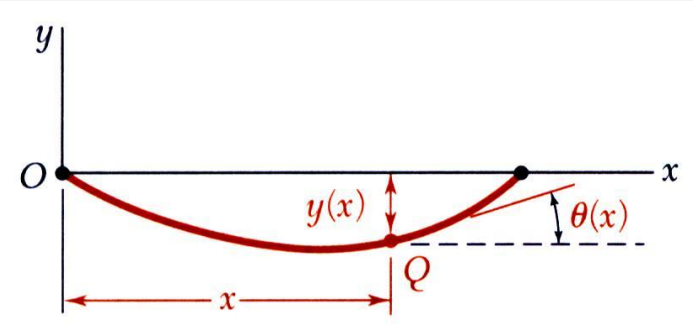




Equação da Linha Elástica



Considerando um ponto Q da linha elástica, temos:



$y(x)$ - deslocamento vertical

$\theta(x)$ - rotação da secção

Pelo calculo matemático temos :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx}$$

As rotações são pequenas logo $\frac{dy}{dx}$ é muito pequeno

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z}$$

Equação diferencial da linha elástica



Equação da Linha Elástica

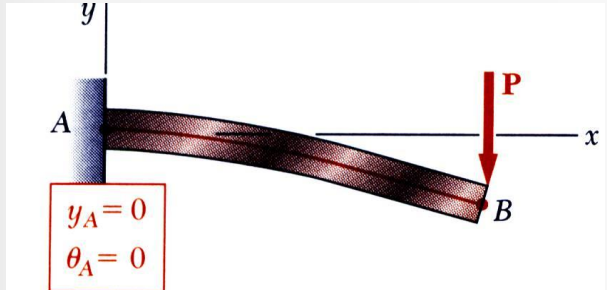
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z}$$

1º Integração

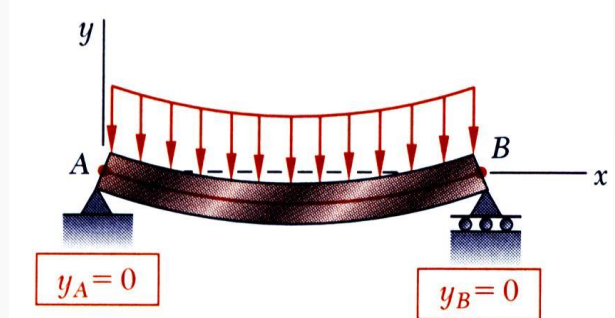
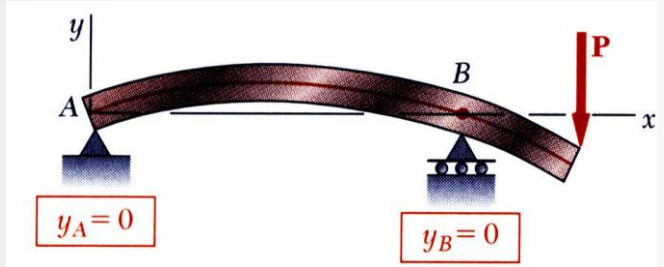
$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{M_z(x)}{EI_z} dx + C_1$$

2º Integração

$$y(x) = \int \int \frac{M_z(x)}{EI_z} dx + C_1 dx + C_2$$



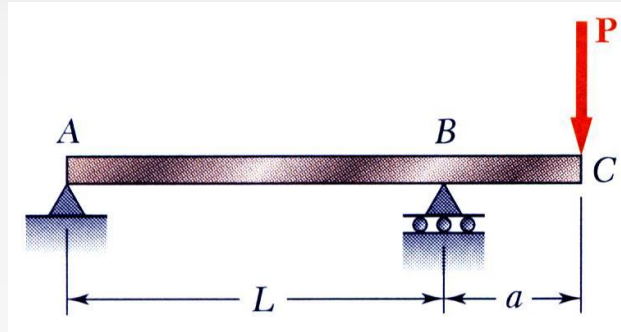
As constantes C_1 e C_2 são calculadas com as chamadas **condições de fronteira**



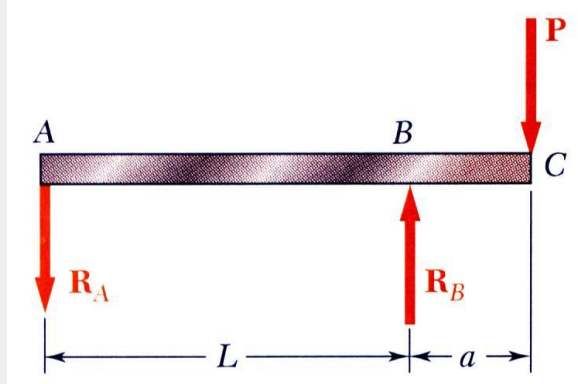


Equação da Linha Elástica - Exemplo

Exemplo



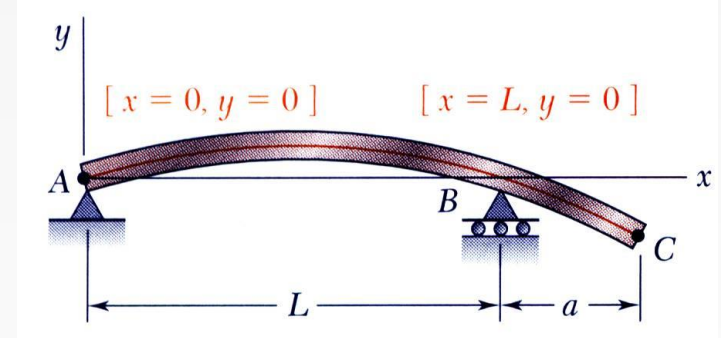
1 - Reações



2 - Momento fletor

$$\frac{dV(x)}{dx} = \omega(x) \qquad \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

3 - Condições de fronteira



4 - Deslocamentos

