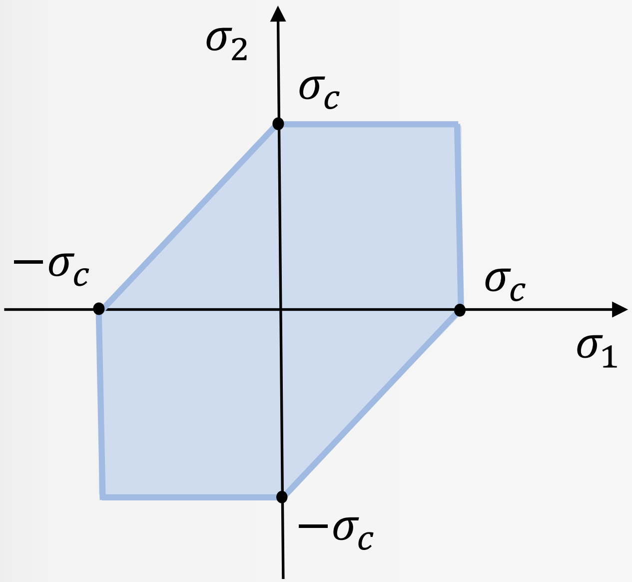
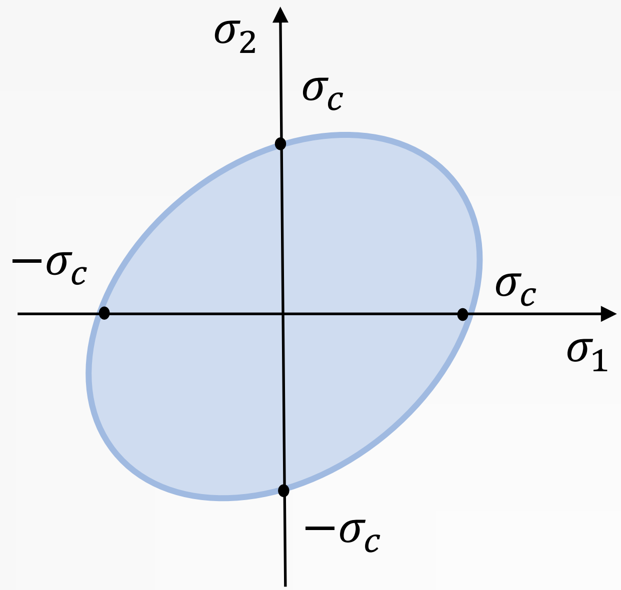
POLITÉCNICO DE LEIRIA
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO

Resistência dos Materiais

Capítulo 5 - Critérios de cedência (ou falha)





Acetatos e imagens baseados nos livros:
- Mechanics of Materials 6th - Beer & Jonhson
- Mecânica e Resistência dos Materiais – V. Dias da Silva
- Resistência dos Materiais 8th , R.C. Hibbeler

Fernando Batista - Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Leiria - 2018

Índice

- Critérios de cedência para **Materiais Dúcteis**
  - Critério de Tresca (Tensão de Corte Máxima) em 1864;
  - Critério de von Mises (Energia de Distorção) em 1913;
  - Estado plano de tensão – Veios
  - Estado uniaxial de tenção - Corte
  - Critério da Tensão Principal Máxima

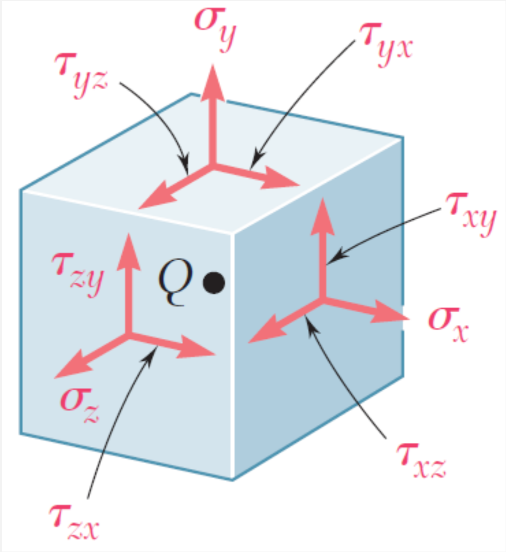
- Critérios de cedência para **Materiais Frágeis**
  - Critério da Tensão Principal Máxima

Henri Édouard **Tresca** - Engenheiro francês (1814-1885)

Richard **von Mises** - Matemático e cientista austríaco (1883-1953)

Critérios de cedência – Estados Multiaxiais de tensão

Estado Triaxial de tensão - 3D



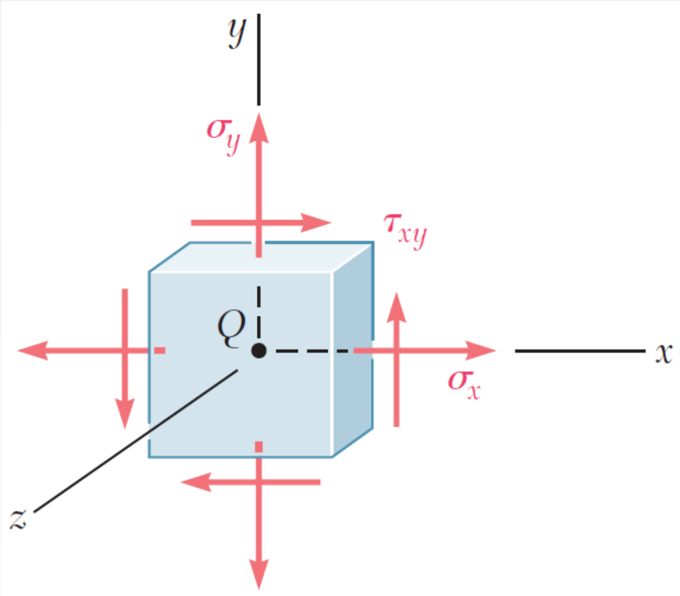
Tensor das tensões

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Tensões Principais

σ_1, σ_2 e σ_3

Estado Biaxial de tensão - 2D



Tensor das tensões

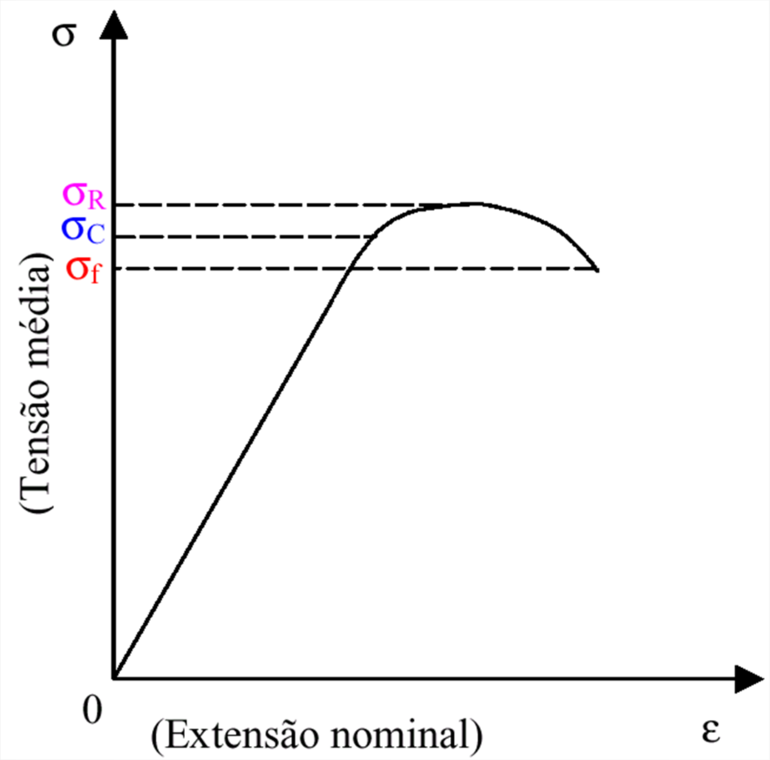
$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Tensões Principais

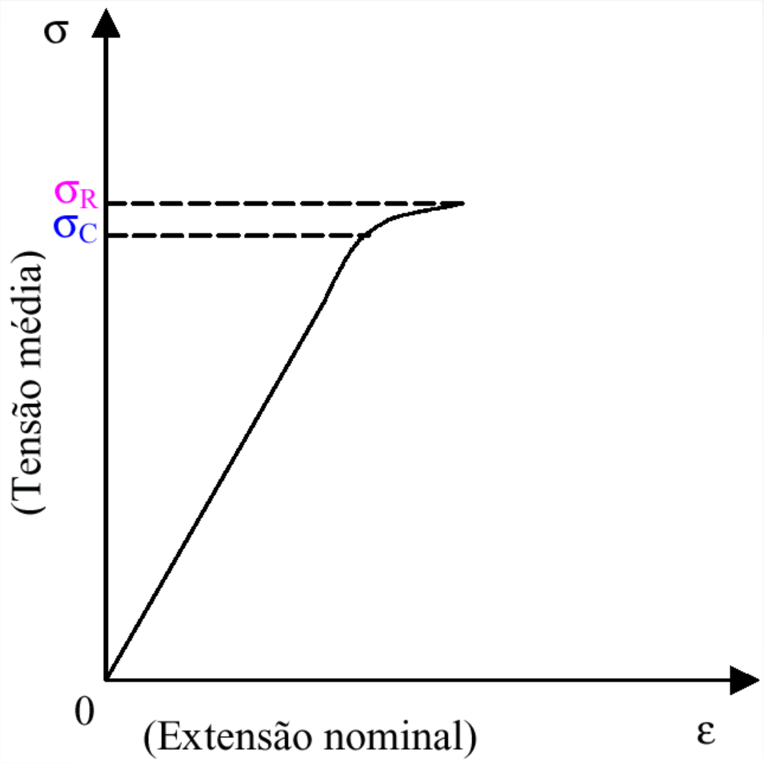
σ_1 e σ_2

Critérios de cedência

Como relacionar as tensões **aplicadas multiaxiais** com a **tensão limite do material** (σ_c ou σ_R) obtida no ensaio de tração uniaxial?



Materiais Dúcteis



Materiais Frágeis

Critérios de cedência - Tensão Equivalente

- A cedência de um elemento submetido a um estado multiaxial de tensão não pode ser diretamente previsto a partir de um ensaio uniaxial.
- É conveniente determinar as tensões principais e utilizar os critérios de cedência a partir do estado de tensão do elemento.
- Eles permitem a comparação das condições de cedência de um ensaio de tensão uniaxial e com um carregamento triaxial ou biaxial utilizando as tensões principais.
- A falha para um **material dúctil é uma falha por cedência**, ao passo que se for **frágil isso ocorrerá pela rotura**.

Como relacionar as tensões aplicadas com a tensão limite do material obtida no ensaio de tração uniaxial? Tensão Equivalente

Condição de de não cedência: $\boxed{\sigma_{eq} < \sigma_c}$

Ou, numa **condição de projeto**: $\boxed{\sigma_{eq} < \sigma_{adm} = \frac{\sigma_c}{n}}$

Critério de cedência - Critério de Tresca (τ_{max}) 2D

Materiais dúcteis

Maximum-Shear-Stress Theory

A falha por cedência ocorre sempre que a tensão de corte máxima aplicada, τ_{max} , atinja a tensão de corte de cedência, $\tau_c = \frac{\sigma_c}{2}$.

$\tau_{max} < \tau_c$ Estado plano de tensão $\Longrightarrow \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} < \frac{\sigma_c}{2}$

Quando σ_1 e σ_2 têm o mesmo sinal

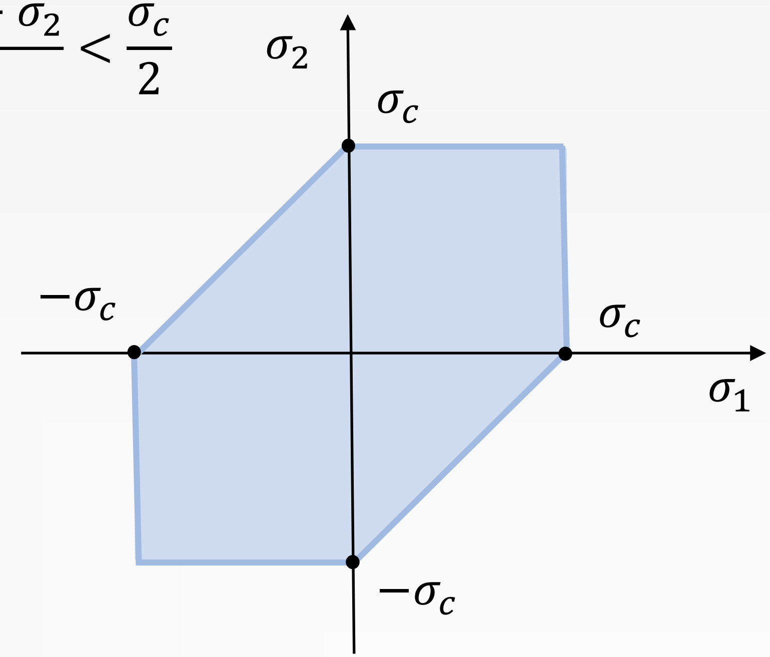
$$\boxed{\sigma_{eq} = max(|\sigma_1|, |\sigma_2|)}$$

Quando σ_1 e σ_2 têm sinais diferentes

$$\boxed{\sigma_{eq} = |\sigma_1 - \sigma_2|}$$

Utilizando as tensões num sistema *xy*:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x{}^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y{}^2 + 4\tau_{xy}{}^2}$$



σ_{eq} *– Tensão equivalente*

σ_c *– Tensão Normal de cedência*

Haverá cedência para todos os pontos fora da área da figura.

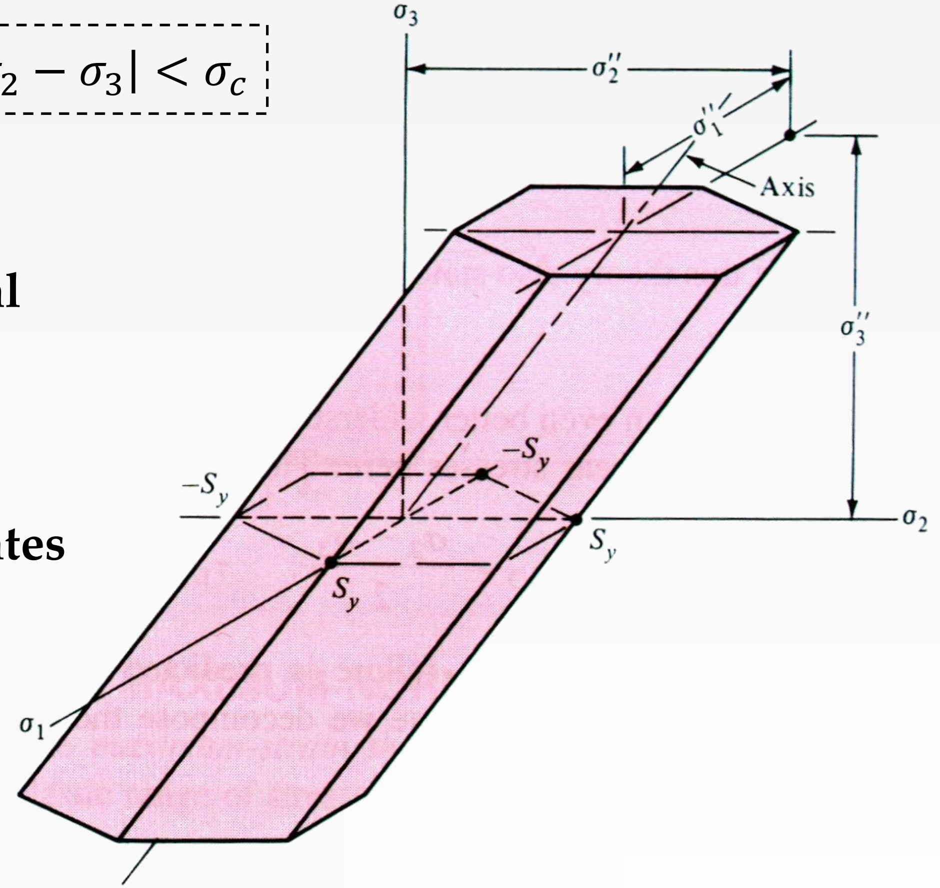
Critério de cedência - Critério de Tresca (τ_{max}) 3D

Materiais dúcteis

$S_y = \sigma_c - Tensão\ Normal\ de\ cedência$

Num estado triaxial de tensão temos um volume:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_c \wedge |\sigma_1 - \sigma_3| < \sigma_c \wedge |\sigma_2 - \sigma_3| < \sigma_c$$



Utilizando a tensão equivalente:

Quando σ_1 e σ_3 têm o mesmo sinal

$$\boxed{\sigma_{eq} = max(|\sigma_1|, |\sigma_3|)}$$

Quando σ_1 e σ_3 têm sinais diferentes

$$\boxed{\sigma_{eq} = |\sigma_1 - \sigma_3|}$$

Haverá cedência para todos os pontos fora do volume da figura.

Critério de cedência - Critério de von Mises - 3D

Materiais dúcteis

A energia de deformação de um corpo é dividida em duas partes; uma volúmica, da responsabilidade da tensão média e outra responsável pela distorção do corpo. O Critério de von Mises ou de HMH (Huber-Mises-Hencky) é um critério de cedência baseado nessa Energia de Distorção. Consiste em:

"A falha ocorre sempre que a energia de distorção verificada num ponto qualquer da peça, atinja o valor da energia de distorção presente no provete de tração quando este entra em cedência."

Energia de deformação especifica total

$$u = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2 - 2v(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\right) = u_v + u_d$$

Energia de distorção especifica

$$u_d = \frac{1+\nu}{6E}\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right)$$

Energia de distorção especifica do ensaio uniaxial, $\boldsymbol{\sigma_1 = \sigma_c \; e \; \sigma_2 = \sigma_3 = 0}$

$$(u_d)_c = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_c{}^2$$

$$\boxed{u_d < (u_d)_c}$$ Critério de von Mises

Critério de cedência - Critério de von Mises - 3D

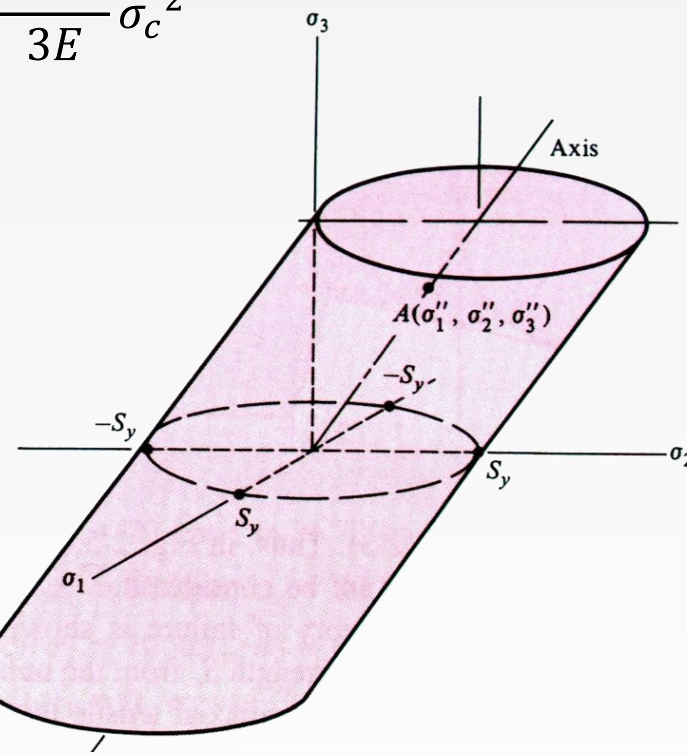
Materiais dúcteis

$S_y = \sigma_c - Tensão\ Normal\ de\ cedência$

$$\frac{1+\nu}{6E}\left((\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2\right)<\frac{1+\nu}{3E}{\sigma_c}^2$$

$$\Longrightarrow \frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2}{2}<{\sigma_c}^2$$

$$\boxed{\sigma_{eq}=\sqrt{\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2}{2}}}$$



Haverá cedência para todos os pontos fora do volume da figura.

Utilizando as tensões num sistema xyz:

$$\sigma_{eq}=\sqrt{\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6\left({\tau_{xy}}^2+{\tau_{yz}}^2+{\tau_{zx}}^2\right)}{2}}$$

Critério de cedência - Critério de von Mises - 2D

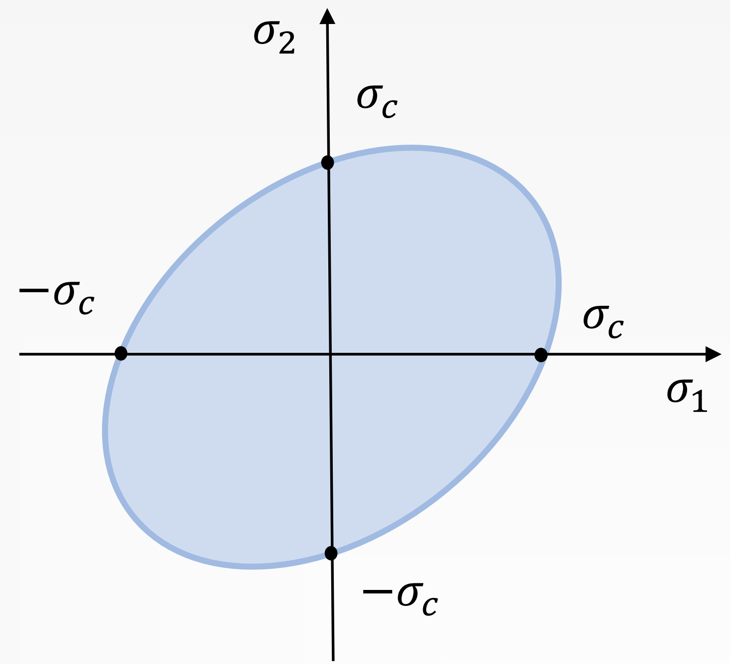
Materiais dúcteis

Num estado plano de tensão, $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ logo $\sigma_3 = 0$ temos

$$\frac{{\sigma_1}^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + {\sigma_2}^2}{2} < {\sigma_c}^2$$

$\sigma_c - Tensão\ Normal\ de\ cedência$

$$\boxed{\sigma_{eq} = \sqrt{{\sigma_1}^2 - \sigma_1\sigma_2 + {\sigma_2}^2}}$$



Utilizando as tensões num sistema xyz:

$$\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + {\sigma_y}^2 + {\sigma_x}^2 + 6({\tau_{xy}}^2)}{2} < {\sigma_c}^2$$

$$\boxed{\sigma_{eq} = \sqrt{{\sigma_x}^2 - \sigma_x\sigma_y + {\sigma_y}^2 + 3{\tau_{xy}}^2}}$$

Haverá cedência para todos os pontos fora da área da figura.

Critério de rotura - Critério da Tensão Principal Máxima

Materiais frágeis

Também é utilizado em materiais dúcteis.

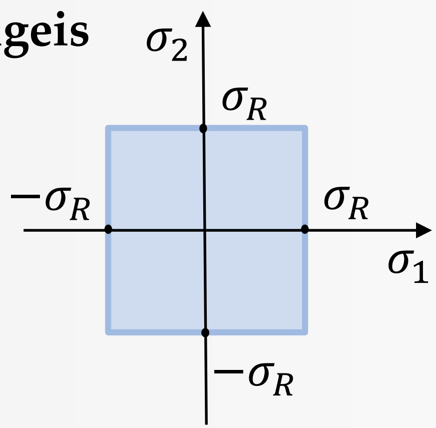
"Considera que a tensão principal máxima, σ_1, ou mínima, σ_3 (σ_2), têm importância para efeitos de cedência ou rotura.
Se existem as outras tensões principais σ_2 e σ_3 ou σ_1, elas não influenciam a ocorrência de cedência e podem, portanto ser desprezadas."

Estado triaxial de tensão: $\boxed{\sigma_{eq} = max(|\sigma_1|, |\sigma_3|)}$

Estado plano de tensão: $\boxed{\sigma_{eq} = max(|\sigma_1|, |\sigma_2|)}$

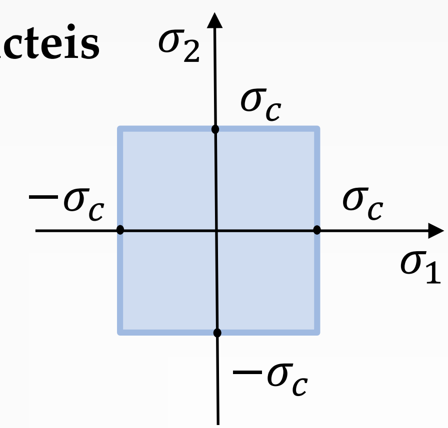
Materiais frágeis

$\boxed{\sigma_{eq} < \sigma_R}$



Materiais dúcteis

$\boxed{\sigma_{eq} < \sigma_c}$

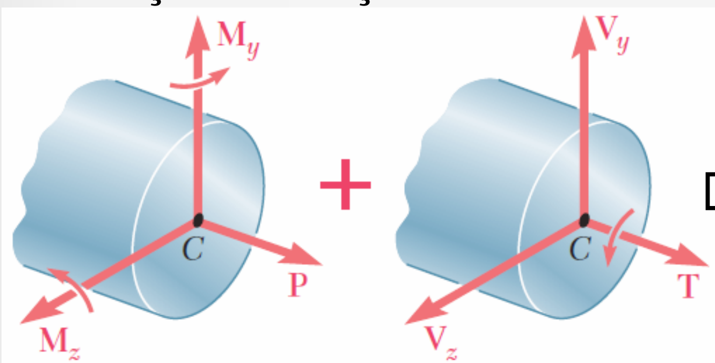


Haverá rotura/cedência para todos os pontos fora das áreas das figuras.

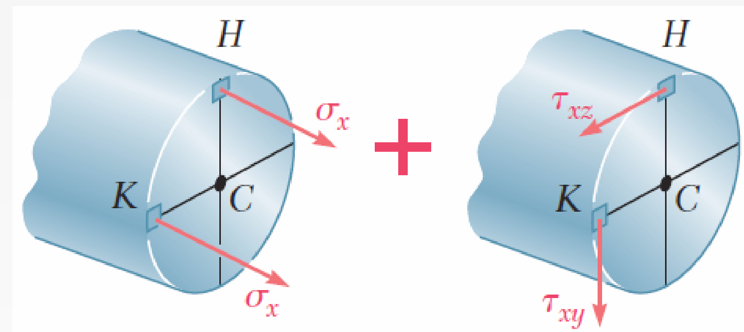
Critério de cedência - Estado plano de tensão - Veios

Um veio pode estar sujeito a uma combinação de esforços: **momentos fletores**, **cargas axiais** que provocam tensões normais na secção e **esforços transversos** e a **um momento torsor** que provocam tensões de corte na secção.

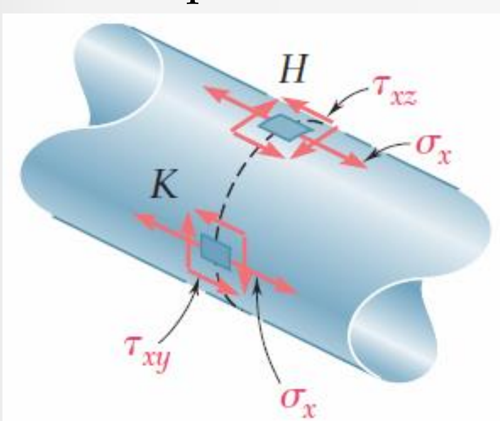
Esforços na secção



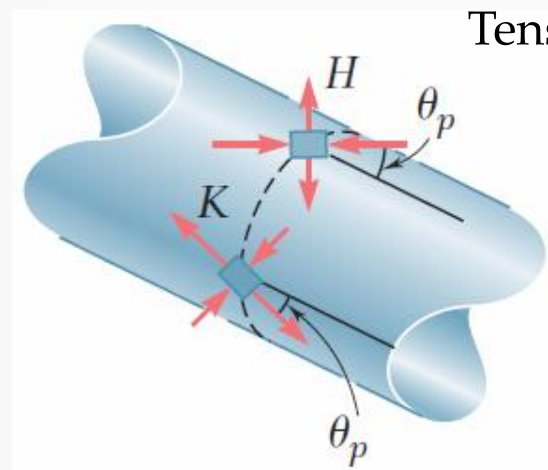
Tensões normais e tensões de corte



Estado plano de tensão



Tensões Principais

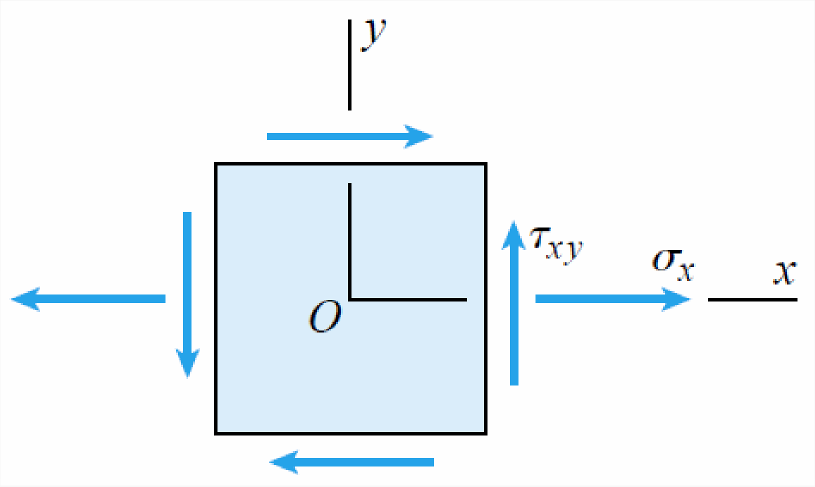


σ_1 e σ_2 têm sinais diferentes

Critério de cedência - Estado plano de tensão - Veios

Tensões equivalentes

Surge assim junto à superfície um **estado plano de tensão (2D)**, assim temos as seguintes tensões equivalentes:



Critério de Tresca

$\sigma_y = 0$ temos,

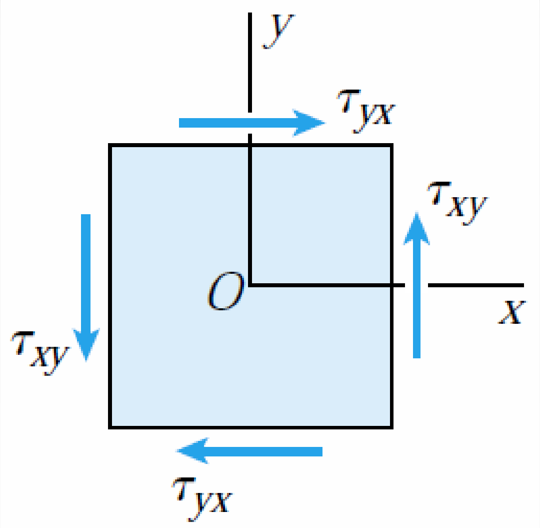
$$\sigma_{eq} = \sqrt{{\sigma_x}^2 - \sigma_x \cdot 0 + 0^2 + 4{\tau_{xy}}^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_{eq} = \sqrt{{\sigma_x}^2 + 4{\tau_{xy}}^2}}$$

Critério de von Mises

$\sigma_y = 0$ temos,

$$\sigma_{eq} = \sqrt{{\sigma_x}^2 - \sigma_x \cdot 0 + 0^2 + 3{\tau_{xy}}^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_{eq} = \sqrt{{\sigma_x}^2 + 3{\tau_{xy}}^2}}$$

Critério de cedência - Corte Puro



Tensões equivalentes

Com apenas uma tensão de corte, temos **estado plano de tensão (2D)** e assim as tensões equivalentes são as seguintes:

Critério de Tresca

$\sigma_z = \sigma_y = 0$ temos,

$$\sigma_{eq} = \sqrt{0^2 - 0 \cdot 0 + 0^2 + 4{\tau_{xy}}^2} \Rightarrow \sigma_{eq} = 2|\tau_{xy}|$$

Podemos assumir assim a relação entre as duas tensões de cedência: $\boxed{\tau_c = \frac{\sigma_c}{2}}$

Exemplo:
Um veio sujeito apenas a uma momento torsor

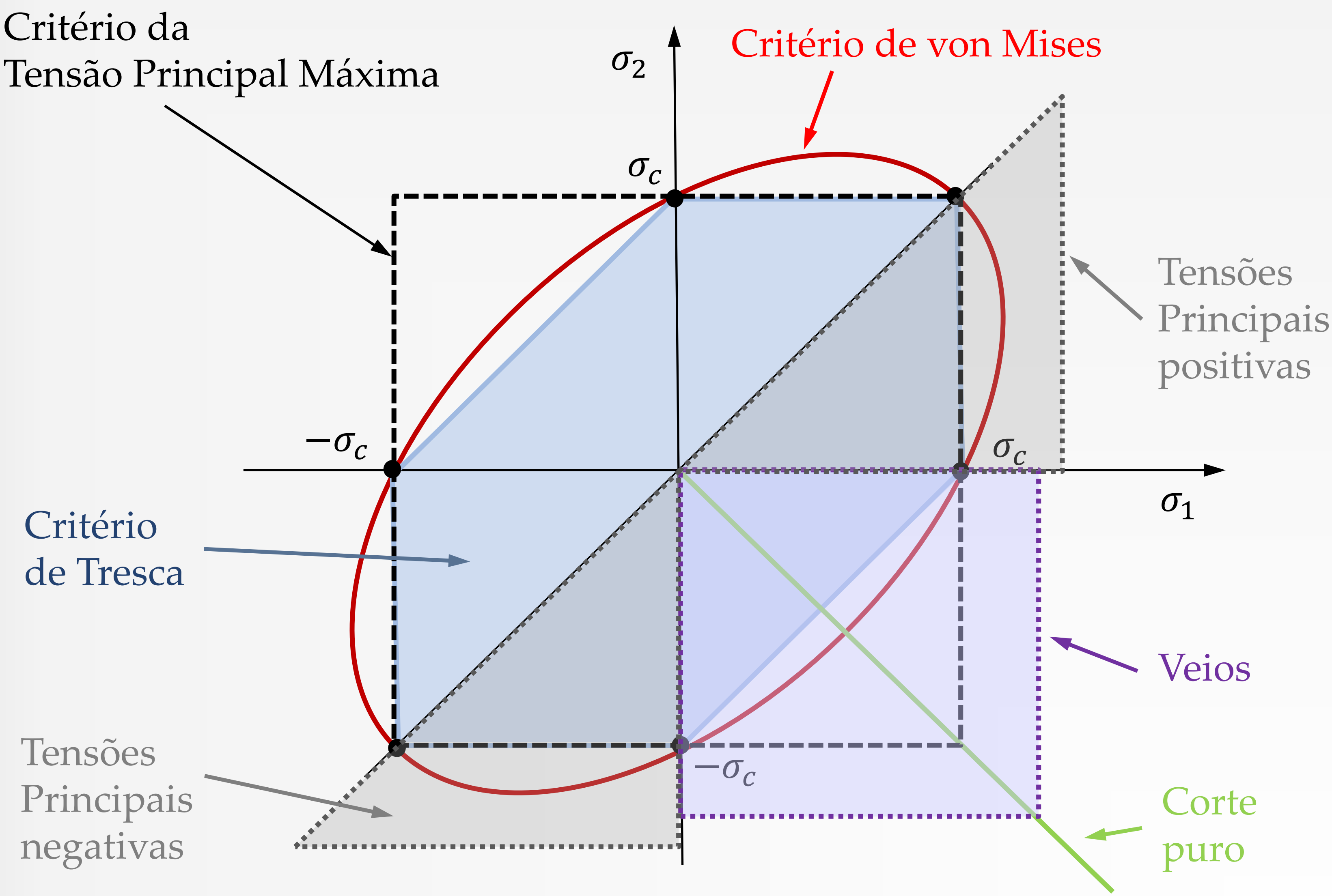
Critério de von Mises

$\sigma_x = \sigma_y = 0$ temos,

$$\sigma_{eq} = \sqrt{0^2 - 0 \cdot 0 + 0^2 + 3{\tau_{xy}}^2} \Rightarrow \sigma_{eq} = \sqrt{3}|\tau_{xy}|$$

Podemos assumir assim a relação entre as duas tensões de cedência: $\boxed{\tau_c = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}}$

Comparação dos 3 Critérios 2D



Comparação dos Critérios de Tresca e von Mises 3D