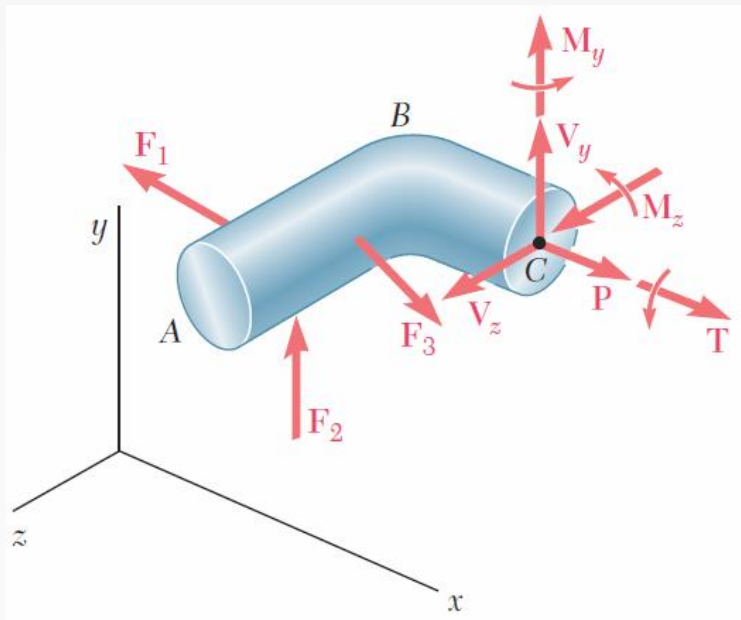
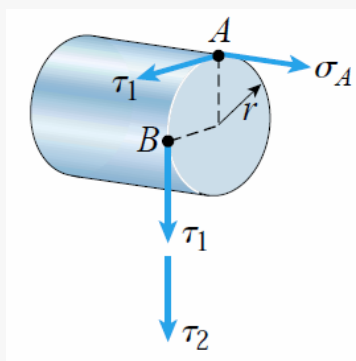
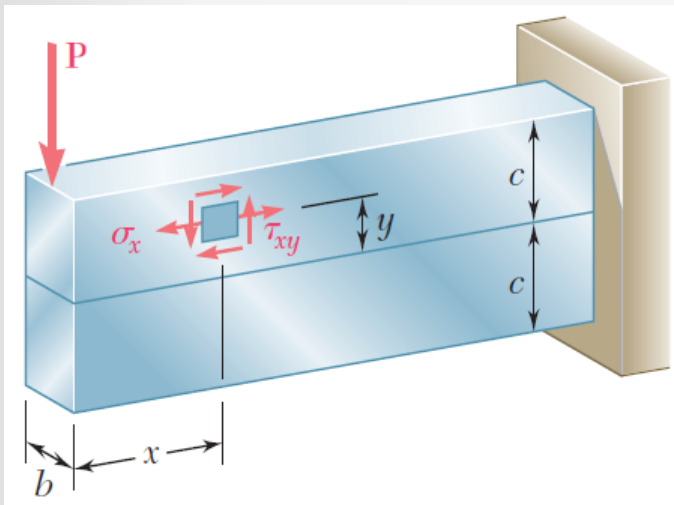


Resistência dos Materiais

Capítulo 5 - Flexão - carregamentos combinados



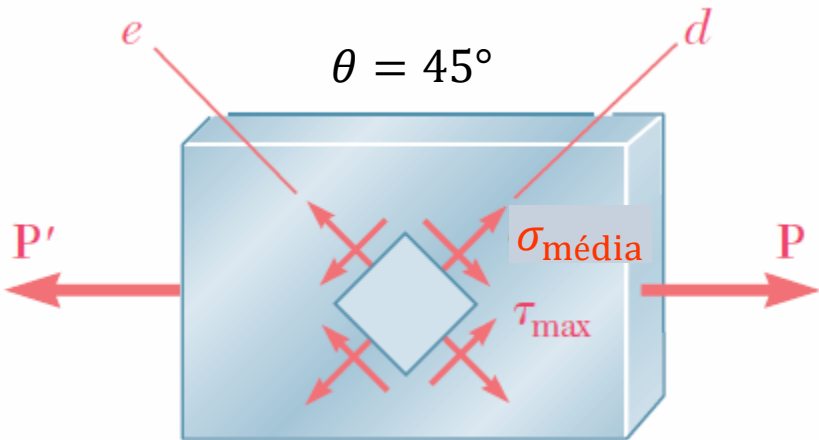
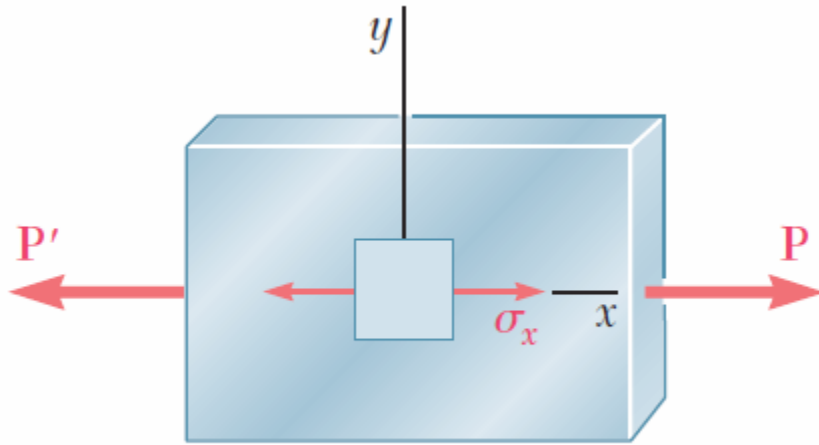
Acetatos e imagens baseados nos livros:
- Mechanics of Materials 6th - Beer & Jonhson
- Mecânica e Resistência dos Materiais – V. Dias da Silva
- Resistência dos Materiais 8th, R.C. Hibbeler



Carregamento simples – Esforço axial

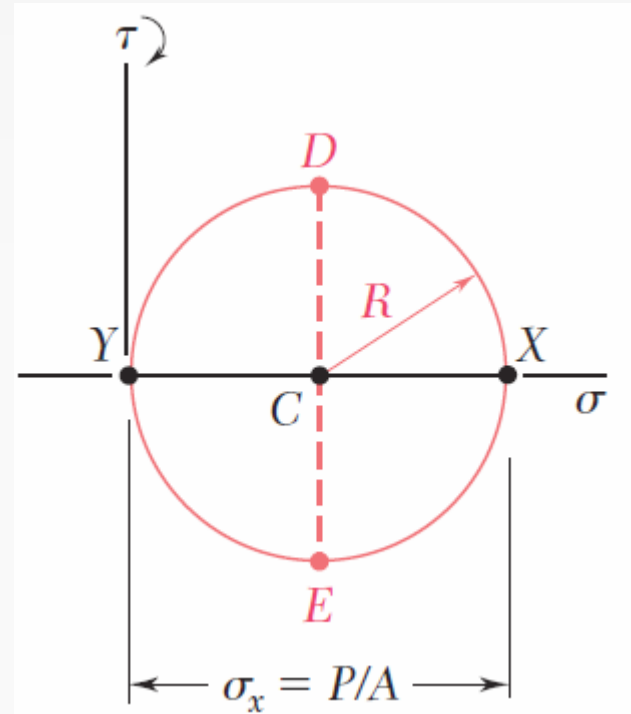
Capítulo 5

Resistência dos Materiais



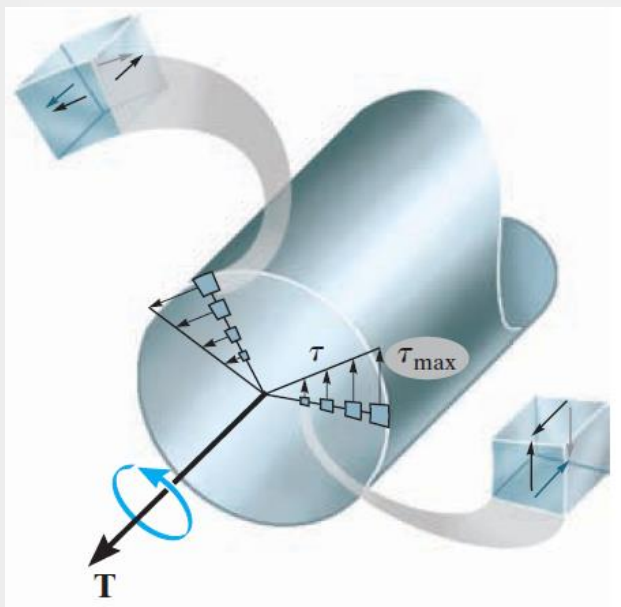
Estado de Tensão

$$\sigma_1 = \sigma_x = \frac{P}{A}$$
$$\sigma_2 = 0$$
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x}{2}$$



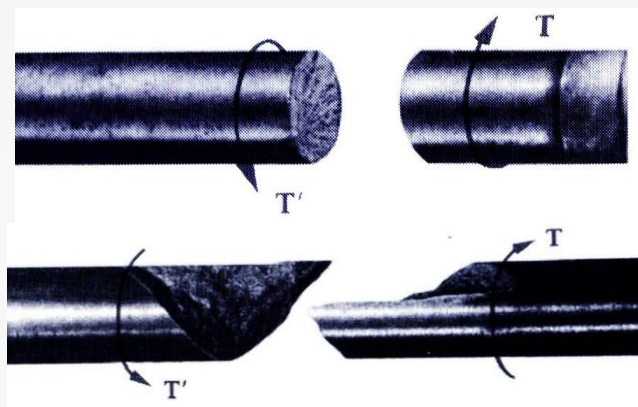


Carregamento simples - Torção



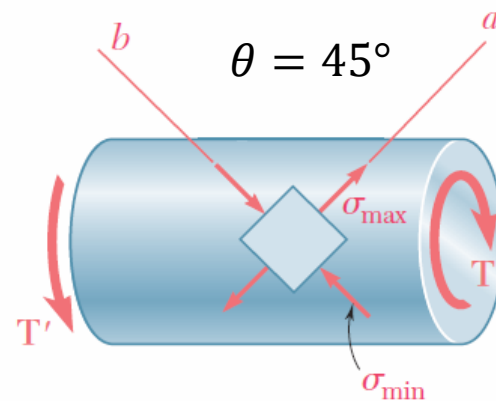
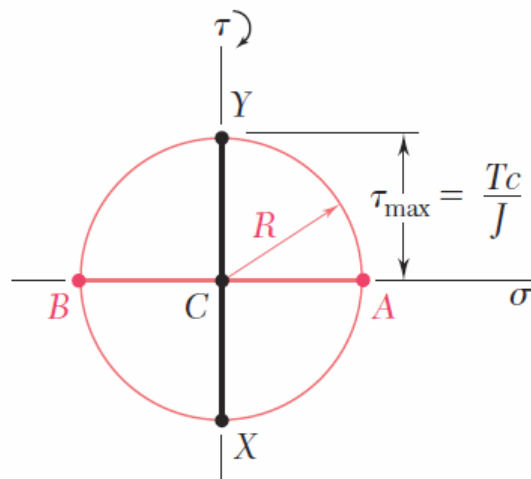
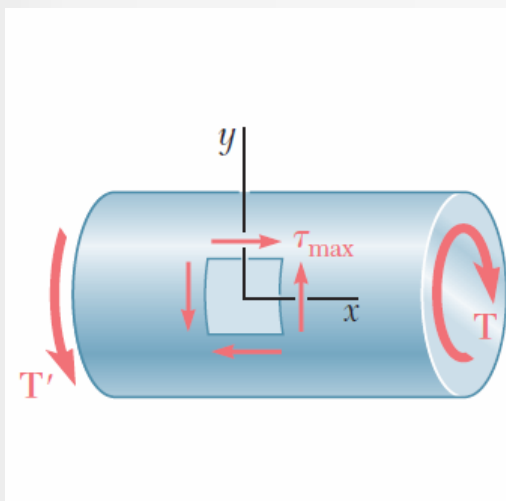
Estado de Tensão

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \tau_{max} \\ \sigma_2 &= -\tau_{max} \end{aligned} \quad \tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$



materiais dúcteis

matérias frágeis

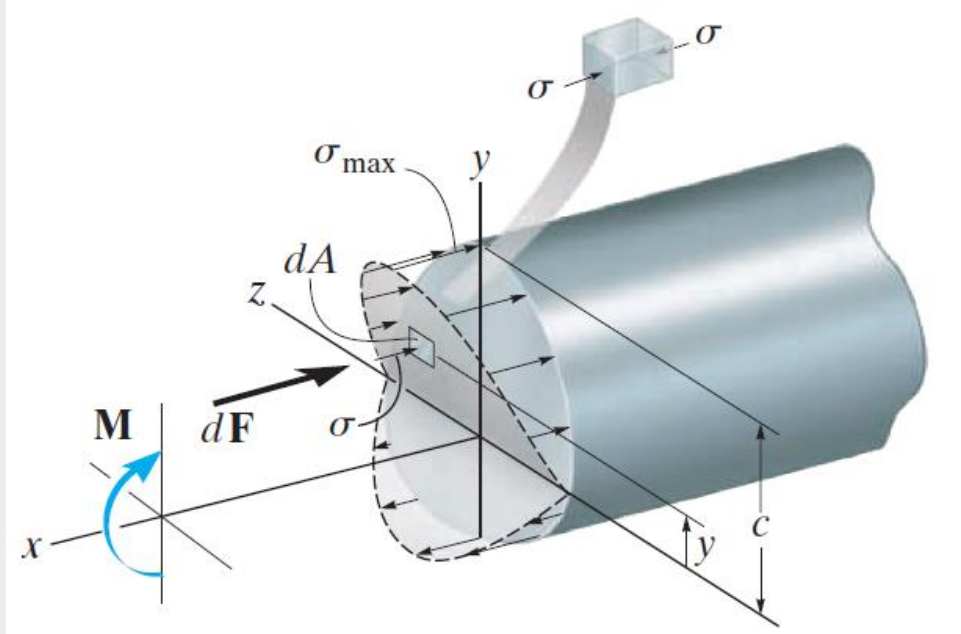




Carregamento simples – Flexão Pura

Capítulo 5

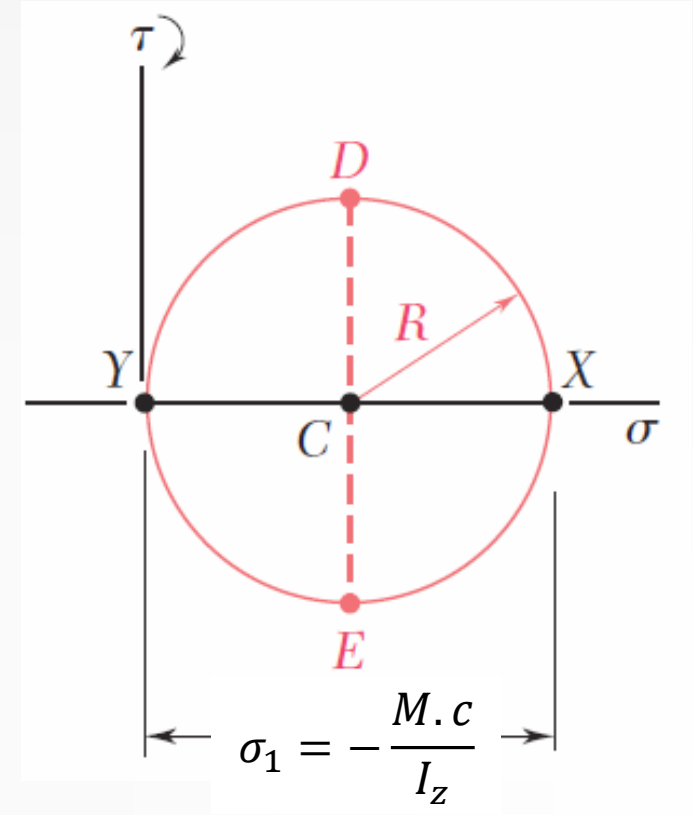
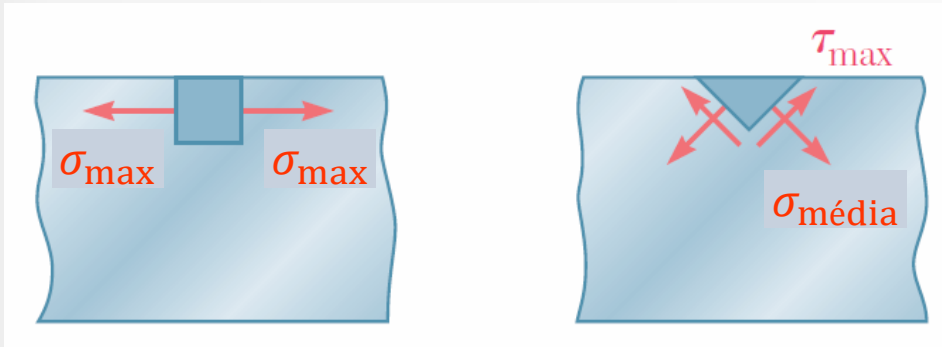
Resistência dos Materiais



Estado de Tensão

$$\sigma_1 = \sigma_x = -\frac{M \cdot c}{I_z} \quad \tau_{max} = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

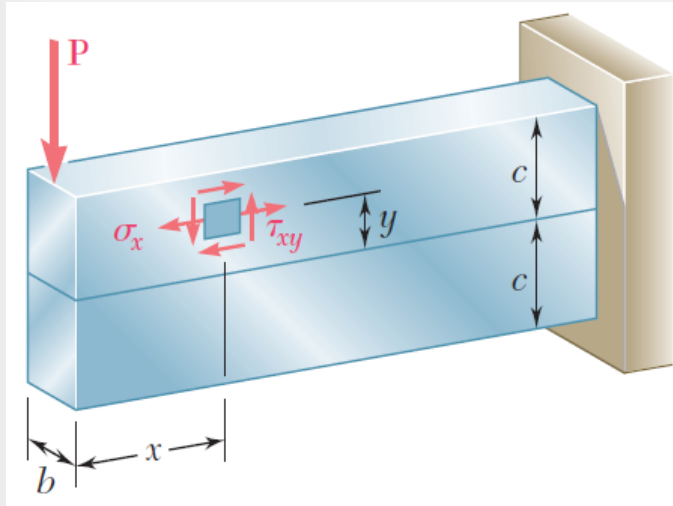




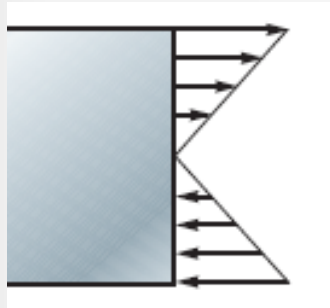
Carregamento combinado - Flexão Simples

Capítulo 5

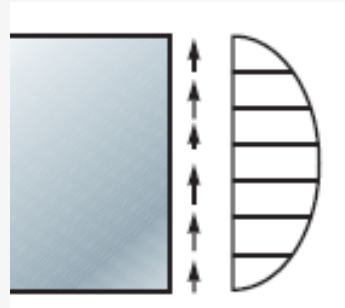
Resistência dos Materiais



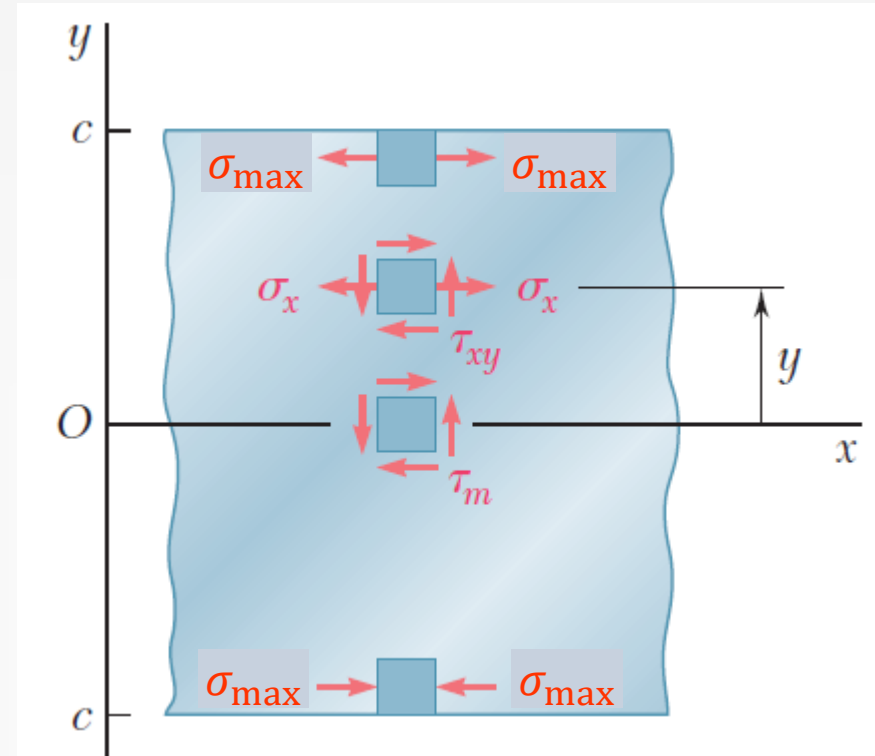
Tensões Normais



Esforço Transverso



Estado de tensão em X-Y

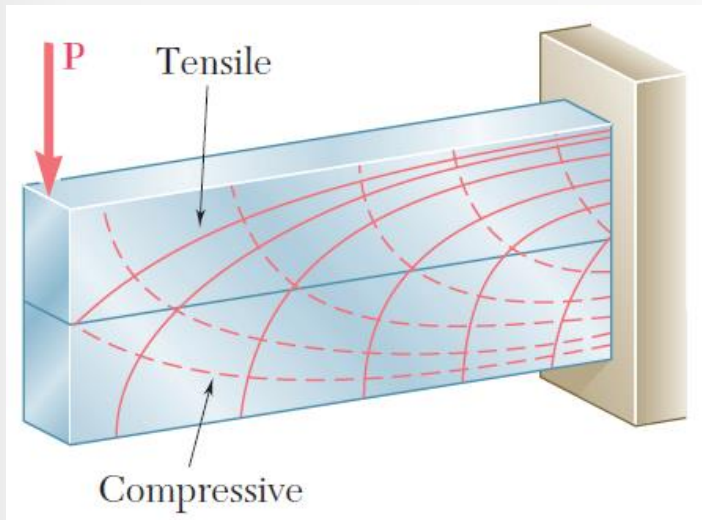
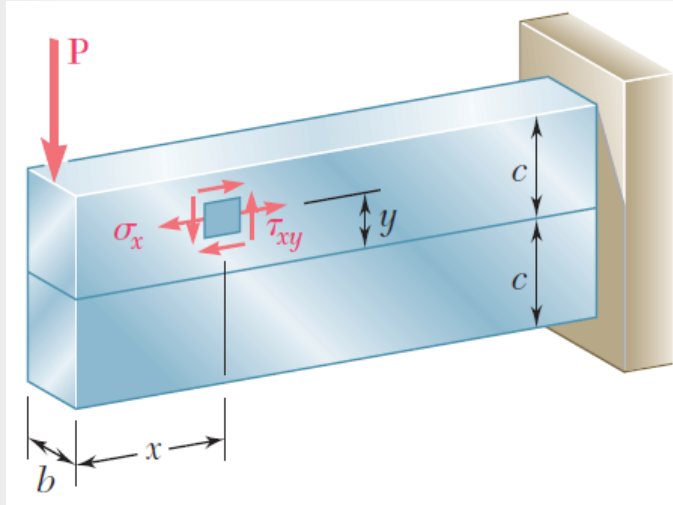




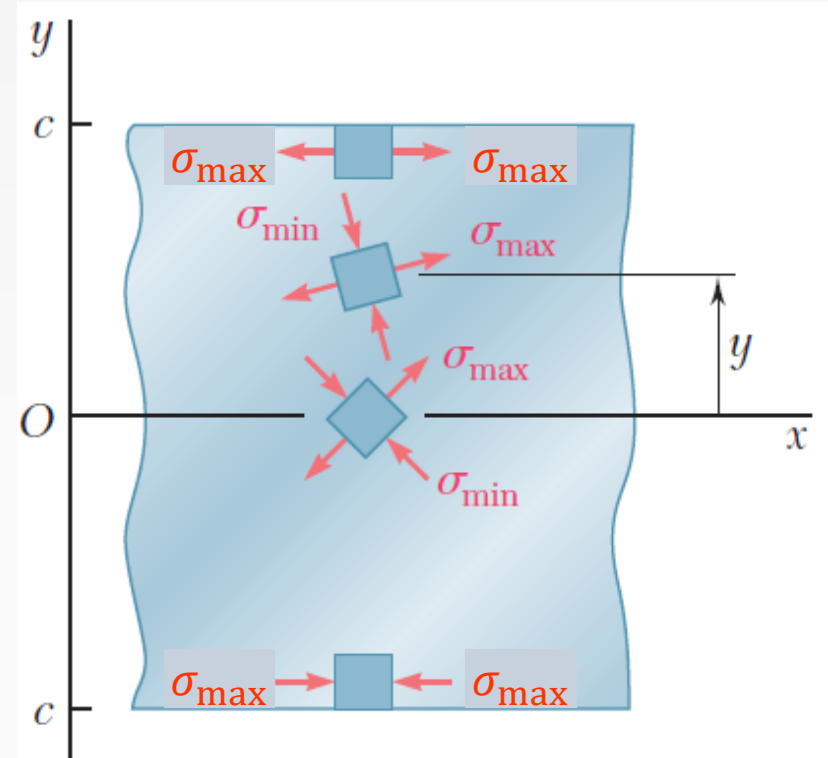
Carregamento combinado - Flexão Simples

Capítulo 5

Resistência dos Materiais



Tensões Principais
Estado de tensão nas direções principais



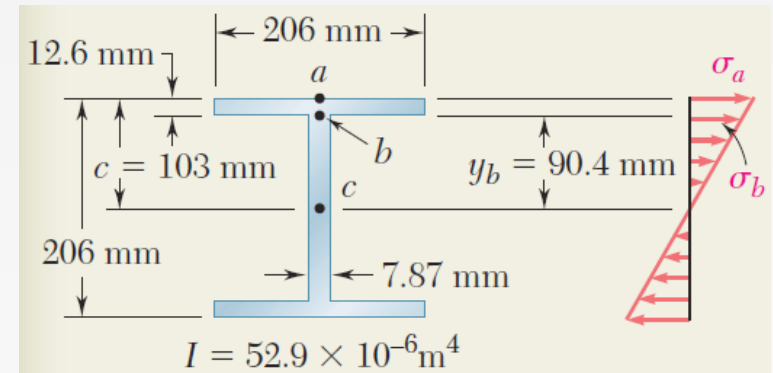
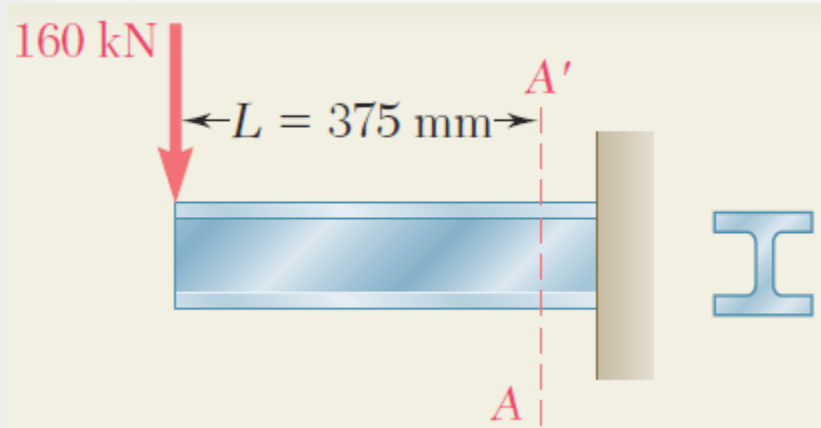
Linhas de Tensão Máximas e Linhas de Tensões Mínimas



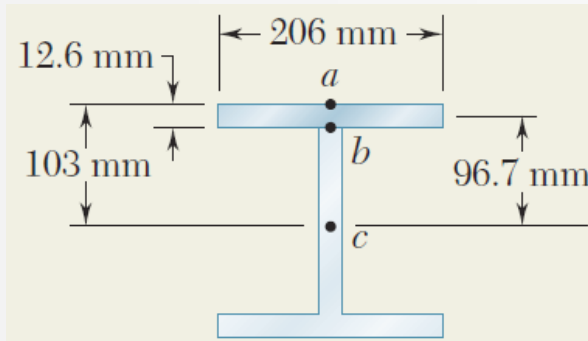
Carregamento combinado - Flexão Simples - Exemplo

Trace o Circulo de Mohr do estado de tensão do ponto b

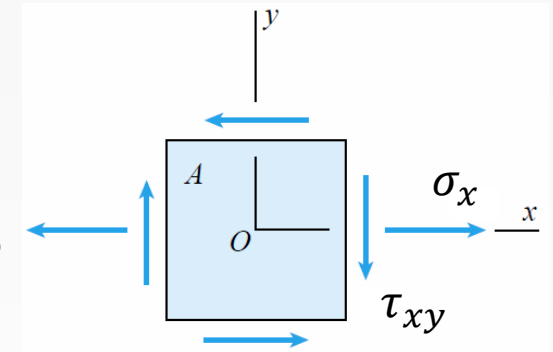
Secção A-A'



Secção A-A' $M = -160000 \times 375 \text{ Nmm}$
 $V = -160000 \text{ N}$



Estado de tensão no ponto b



$$\sigma_x = \sigma_b = -\frac{My_b}{I_z} = 103 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \tau_b = \frac{VQ_b}{t_b I_z} = -96,5 \text{ MPa}$$

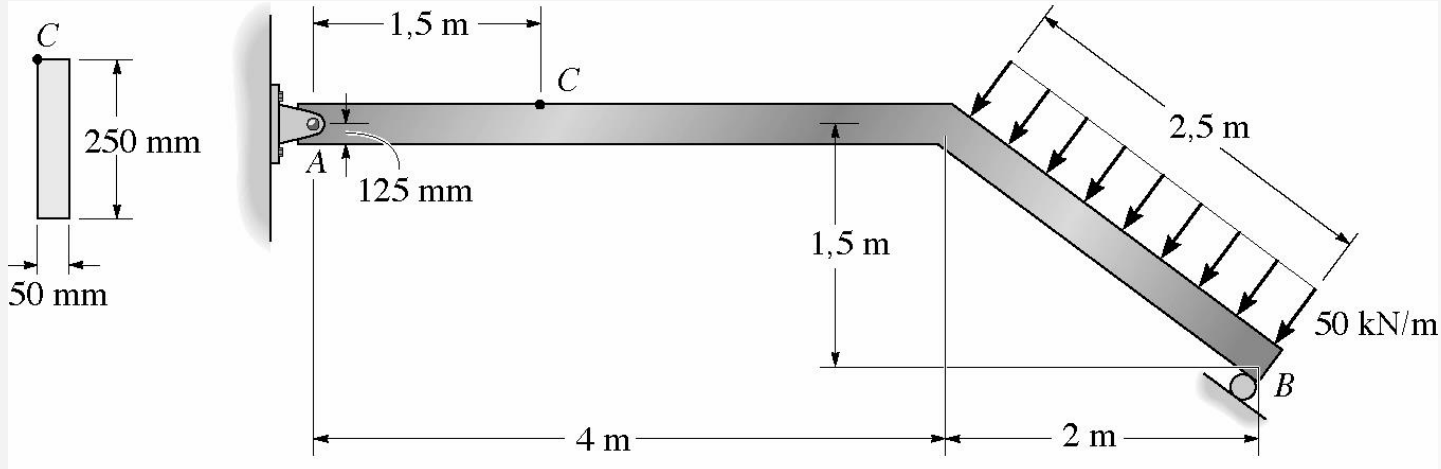
$$I_z = 52,9 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad t_b = 7,87 \text{ mm}$$

$$Q_b = A' \bar{y} = 206 \times 12,6 \times 96,7 \text{ mm}^3$$



Carregamento combinado - Flexão Composta - Exemplo

Determinar a tensão no ponto C



Calculo da reações nos apoios

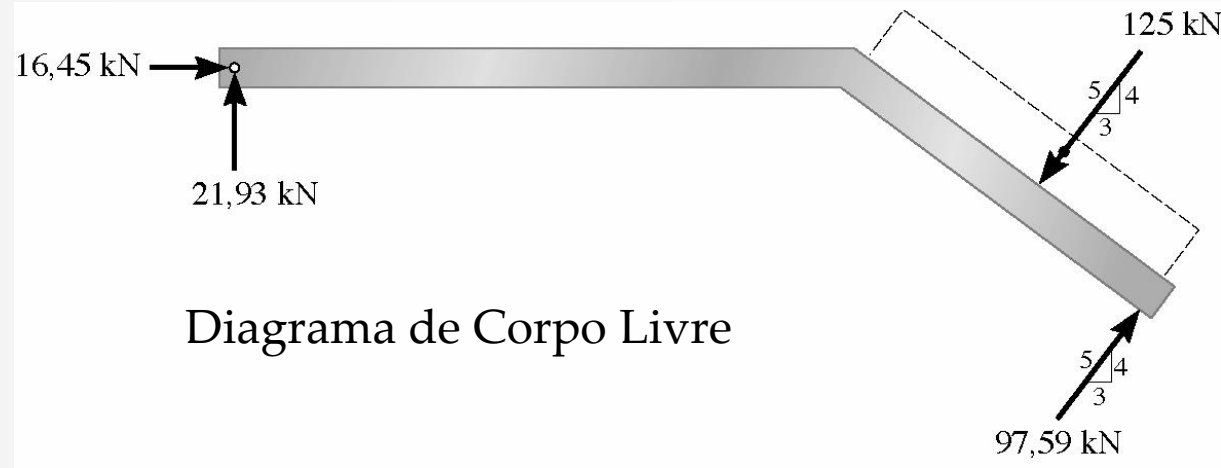


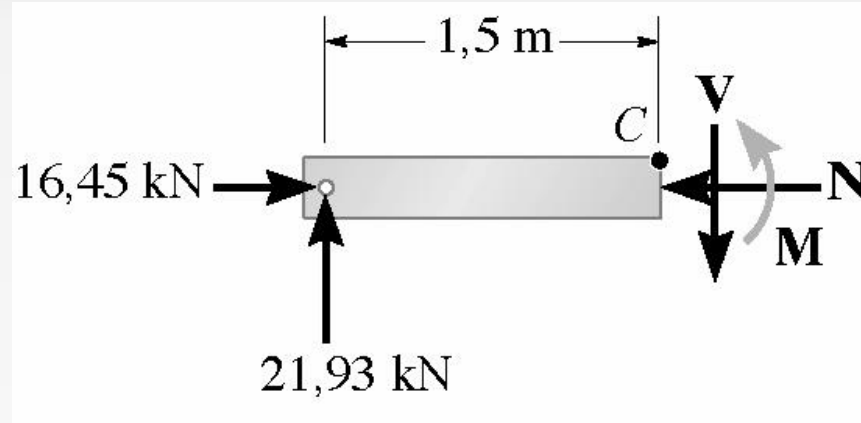
Diagrama de Corpo Livre



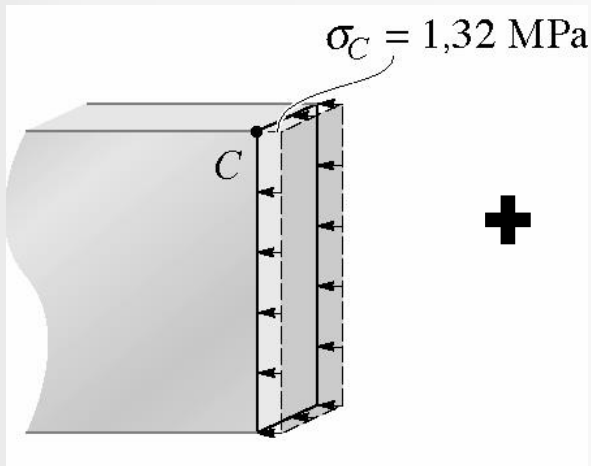
Carregamento combinado - Flexão Composta - Exemplo

Capítulo 5

Esforços na secção que contem o ponto C

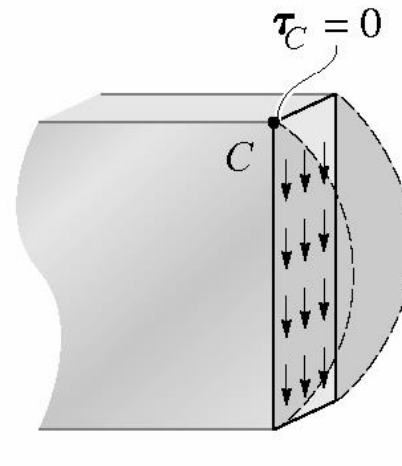


Efeito da Força N



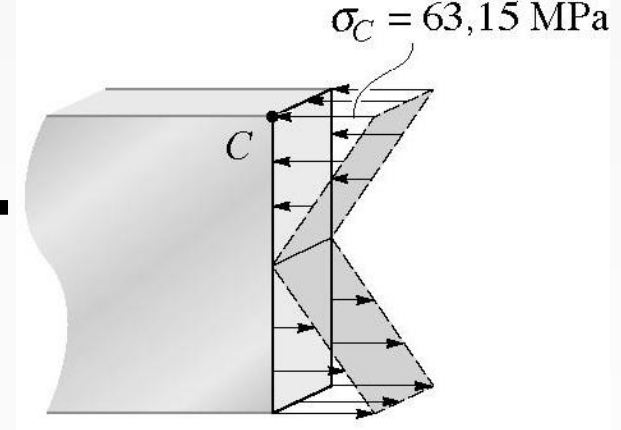
+

Efeito da Força V

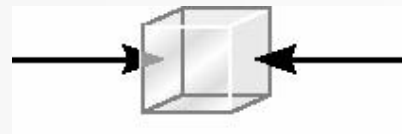


+

Efeito do momento fletor M



Tensão no ponto C

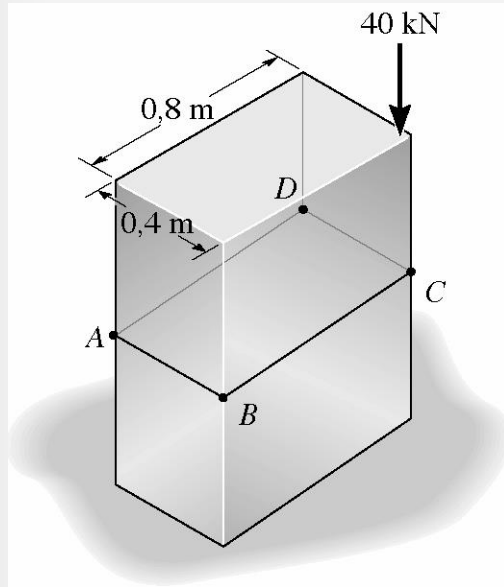


64,47 MPa

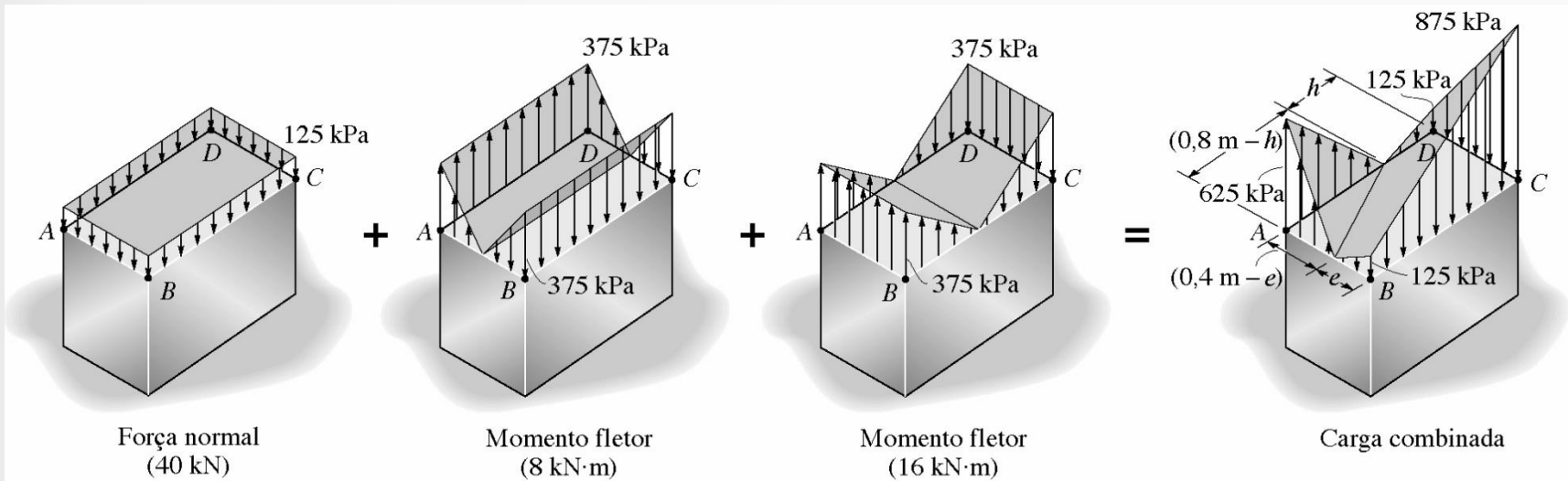
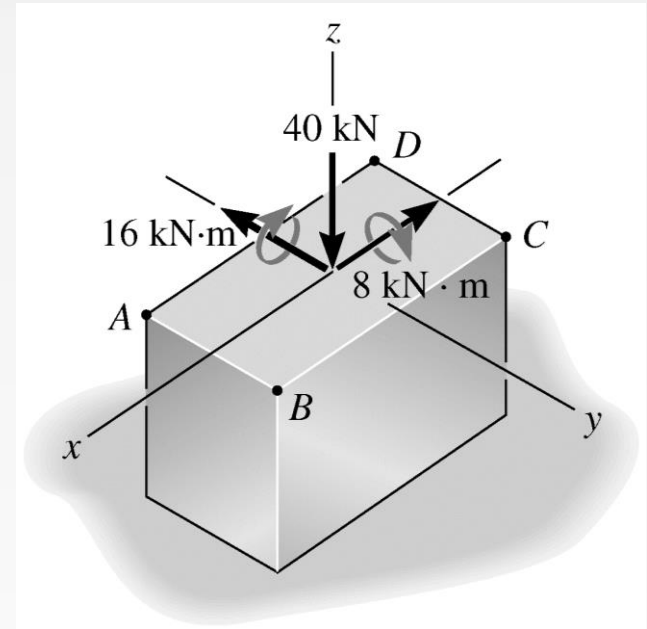
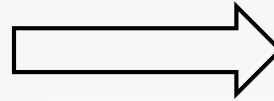


Carregamento combinado - Flexão Desviada - Exemplo

Carregamento de uma carga excêntrica



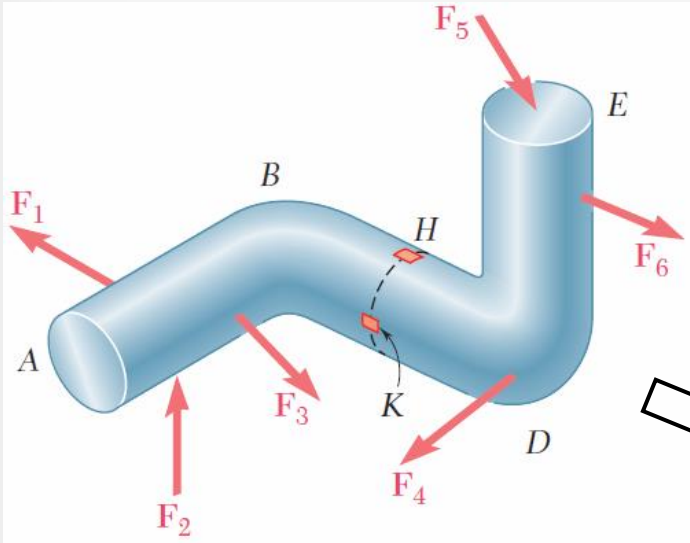
Esforços na Secção ABCD



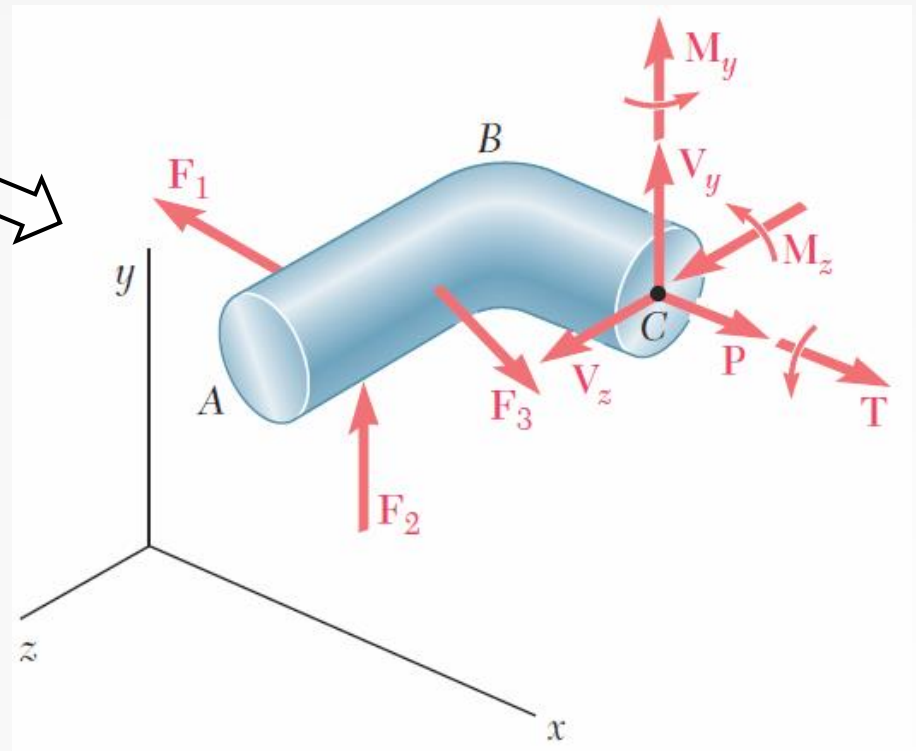


Carregamento combinado - Flexão Composta com Torção

Carregamento genérico



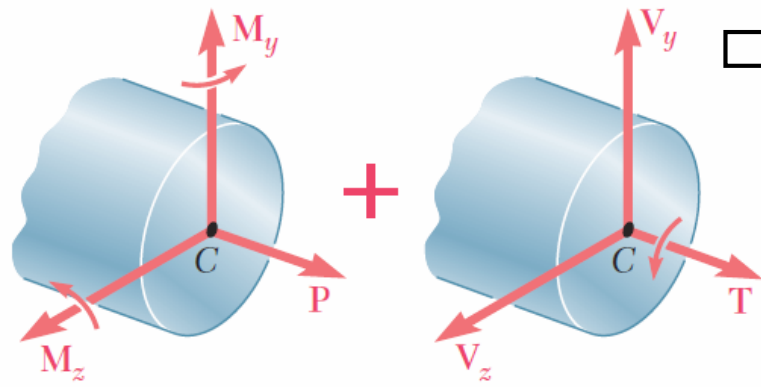
Esforços genéricos numa secção que contém o ponto C



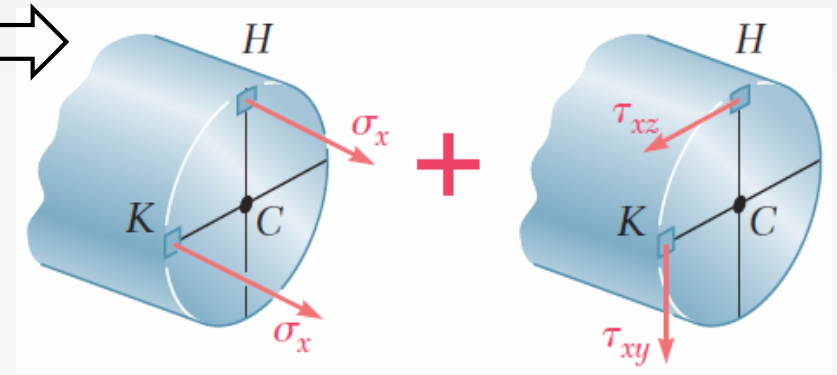


Carregamento combinado - Flexão Composta com Torção

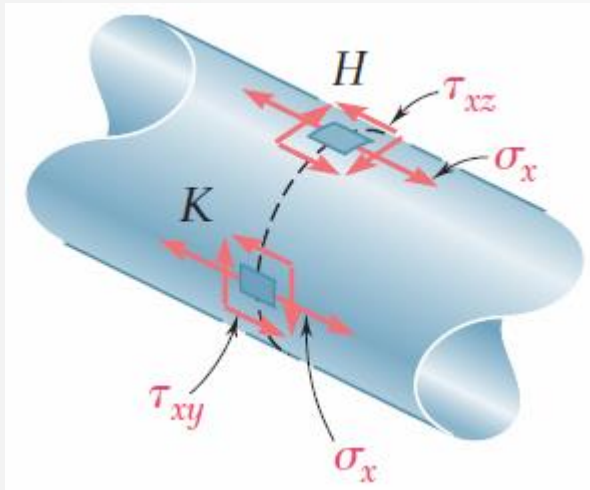
Esforços na secção



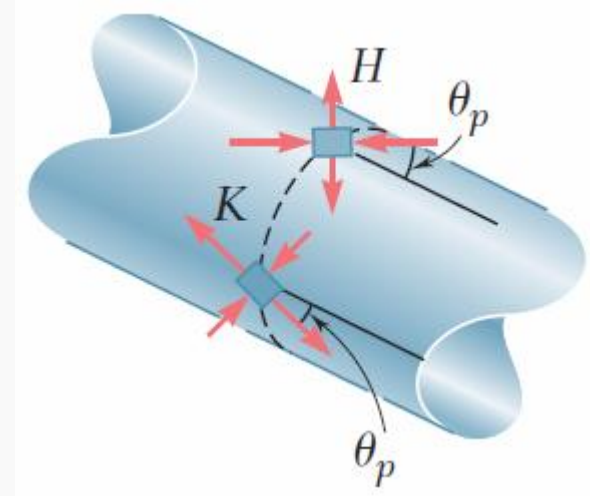
Tensões normais e tensões de corte



Estado de tensão



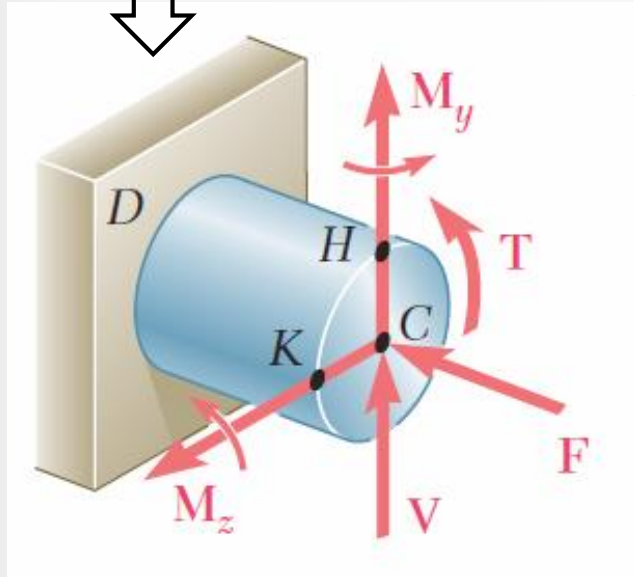
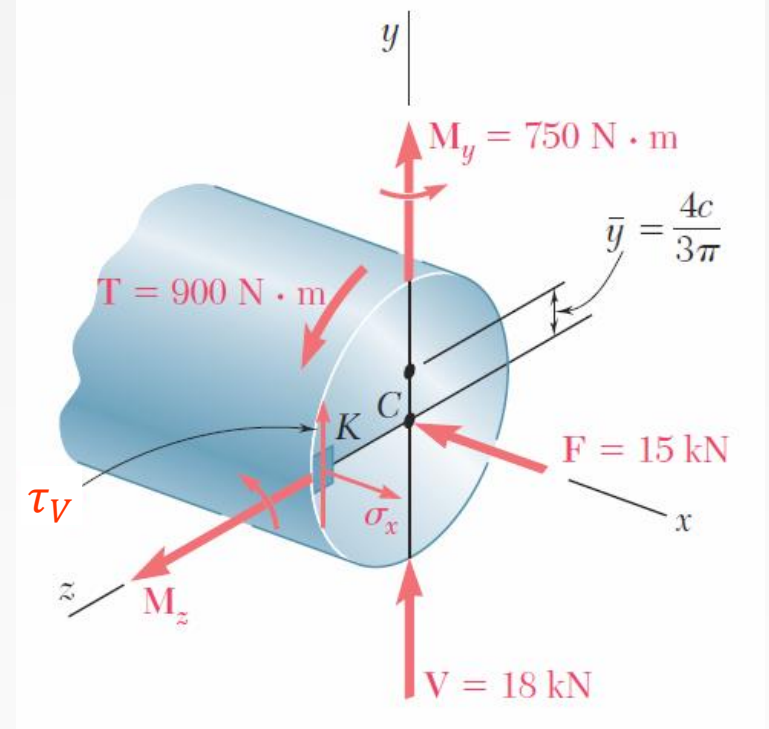
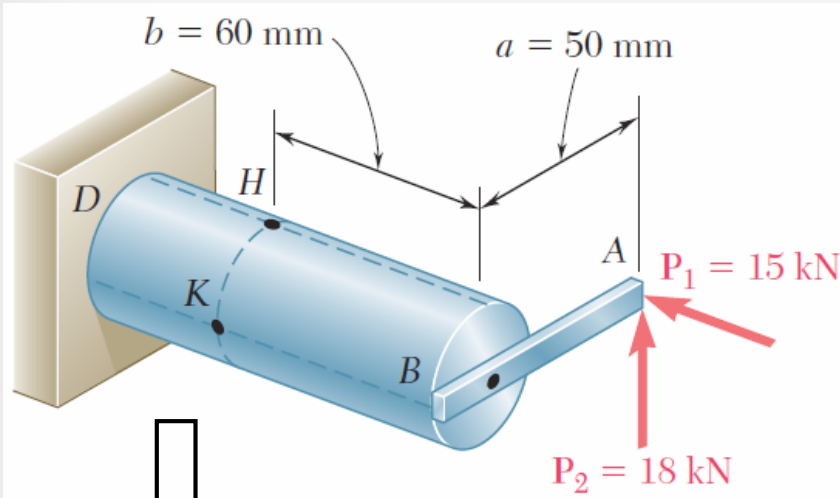
Tensões Principais





Carregamento combinado - Flexão Composta com Torção

Exemplo - Trace o círculo de Mohr do estado de tensão no ponto K



Esforço Normal

$$P = F = P_1$$

Esforço de Corte

$$V = P_2$$

Torção

$$T = P_2 a$$

Flexão

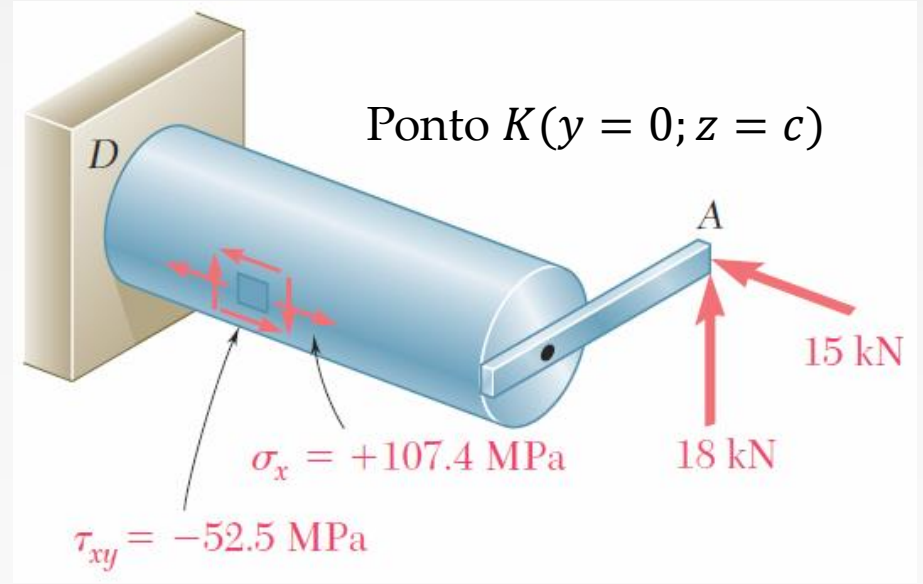
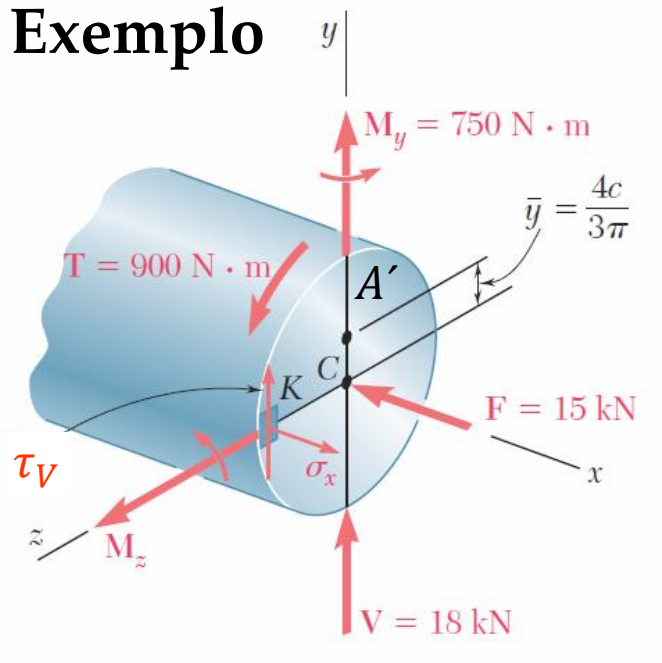
$$M_y = P_1 a$$

$$M_z = P_2 a$$



Carregamento combinado - Flexão Composta com Torção

Exemplo



Propriedades da secção

$$A = \pi c^2 \quad I_y = I_z = \frac{\pi}{4} c^4$$

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

$$Q = A' \bar{y} = \frac{\pi}{2} c^2 \frac{4c}{3\pi} \quad t = 2c$$

Flexão:

Tensão Normal

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

Esforço Transverso $\tau_V = \frac{VQ}{t I_z} = 19,1 MPa$

Torção: $\tau_T = \frac{Tc}{J} = -71,6 MPa$

$$\tau_{xy} = \tau_V + \tau_T$$



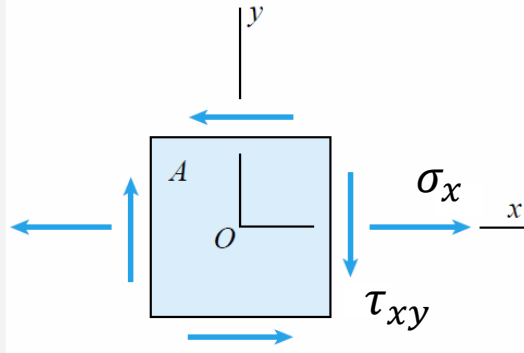
Carregamento combinado - Flexão Composta com Torção

Capítulo 5

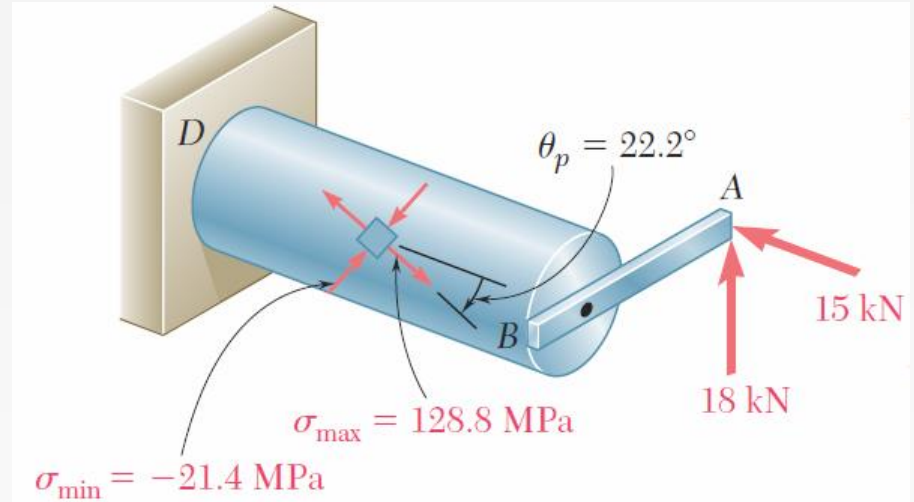
Resistência dos Materiais

Exemplo

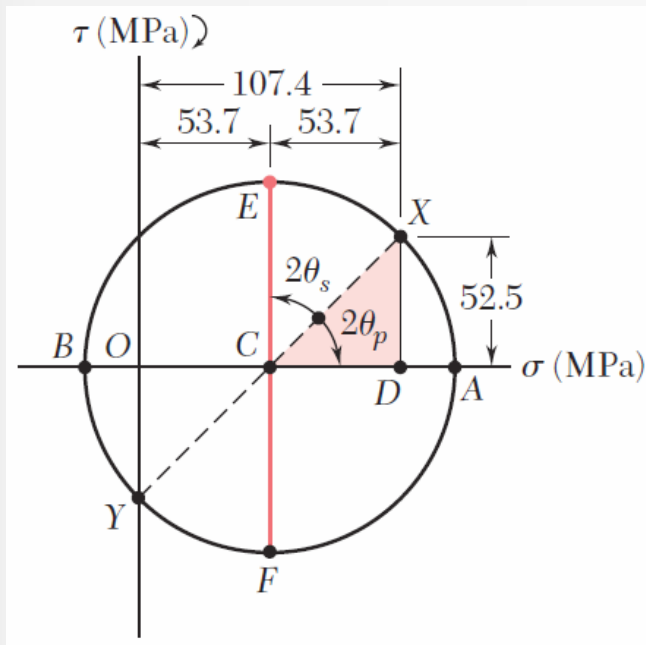
Estado de tensão



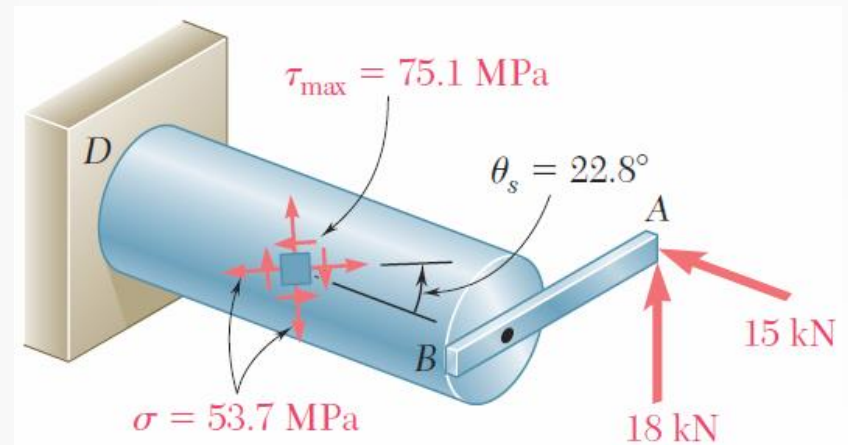
Tensões Principais - orientação



Circulo de Mohr



Tensão de corte máxima - orientação

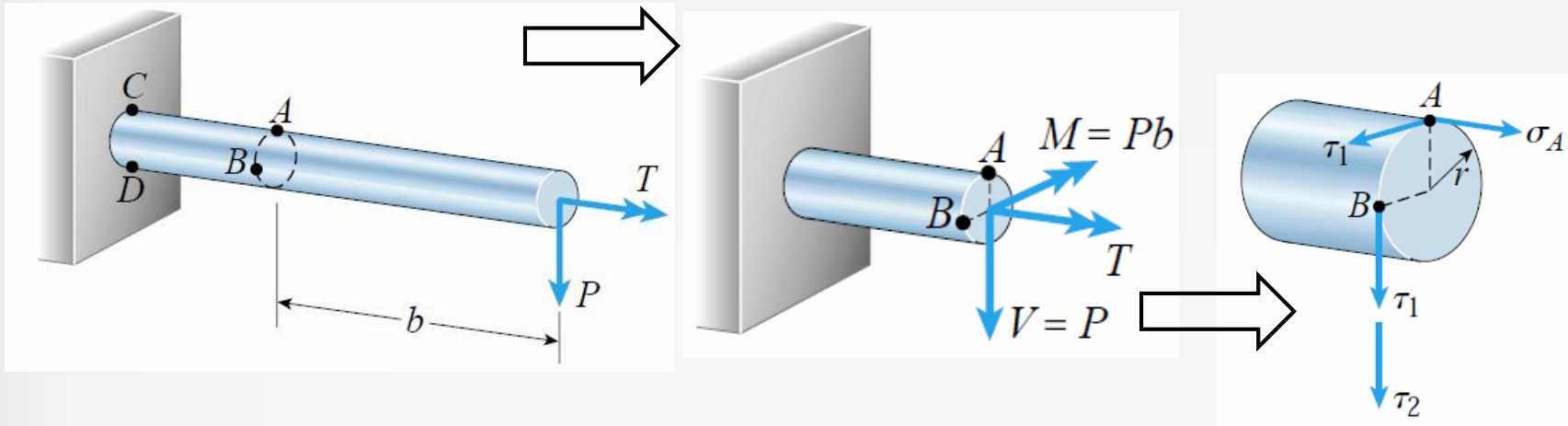




Carregamento combinado - Flexão Simples com Torção

Capítulo 5

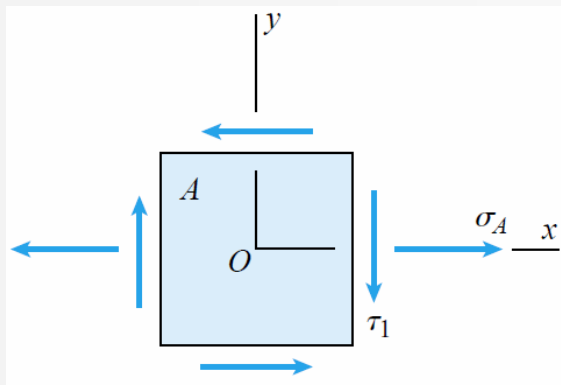
Resistência dos Materiais



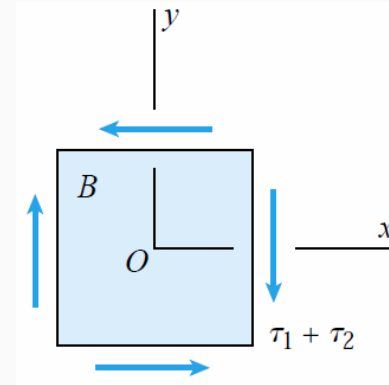
τ_1 - Tensão de Corte provocado pela Torção (T)

τ_2 - Tensão de Corte provocado pela Flexão – Esforço transversal (V)

σ_A - Tensão Normal de tração provocado pela Flexão (M)



Estado de Tensão no ponto A



Estado de Tensão no ponto B

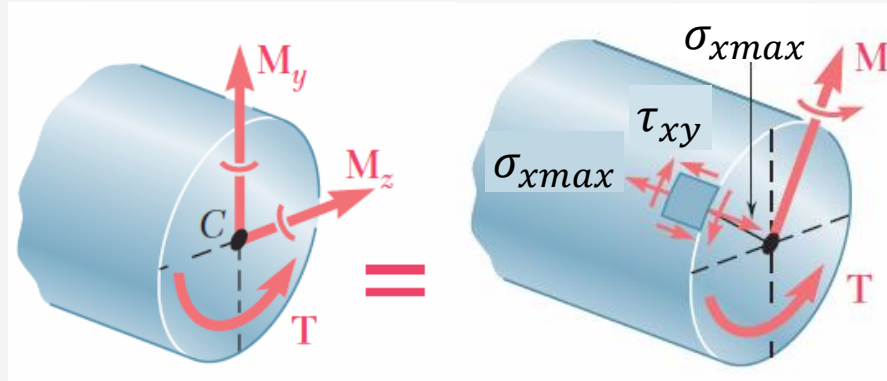


Carregamento combinado - Flexão Simples com Torção

Veios de transmissão

Estes veios não costumam estar sujeito a Esforços Axiais e o **Esforço Transverso é desprezado**, pois este esforço em veios é muito pequeno face as tensões de corte devido ao momento torsor.

$$P = 0$$
$$\tau_V = 0$$



Momento de Inercia

$$I_z = I_y = I = \frac{\pi d^4}{64}$$

Distancia à linha neutra

$$c = \frac{d}{2}$$

$$M^2 = M_y^2 + M_z^2$$

Tensão Normal

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \Rightarrow \sigma_{xmax} = \frac{Mc}{I} \Rightarrow \sigma_{xmax} = \frac{32M}{\pi d^3}$$

Tensão Corte

$$\tau_{xy} = \tau_V + \tau_T \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{Tc}{J} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

Momento Polar de Inercia

$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$

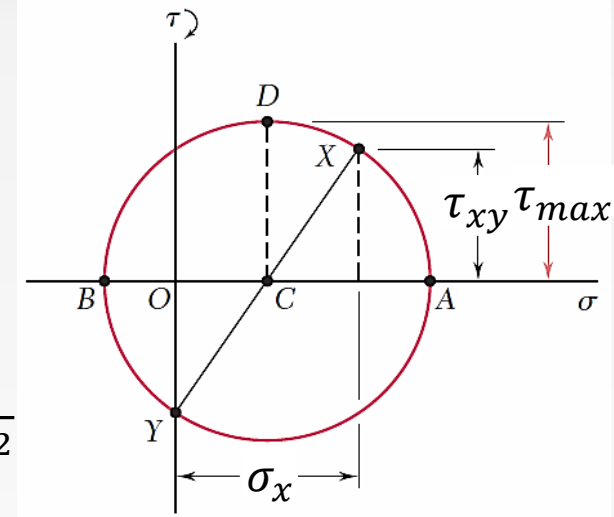


Carregamento combinado - Flexão Simples com Torção

Veios de transmissão

Como estamos num estado plano de tensão temos que determinar a tensão equivalente segundo cada critério.

$$\sigma_x = \frac{32M}{\pi d^3} \quad \tau_{xy} = \frac{16T}{\pi d^3}$$



Critério de Tresca

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \Rightarrow \sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{32M}{\pi d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{eq} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + T^2}$$

Momento Equivalente $M_{eq} = \sqrt{M^2 + T^2}$

Critério de von Mises

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \Rightarrow \sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{32M}{\pi d^3}\right)^2 + 3\left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{eq} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + 0,75T^2}$$

Momento Equivalente $M_{eq} = \sqrt{M^2 + 0,75T^2}$



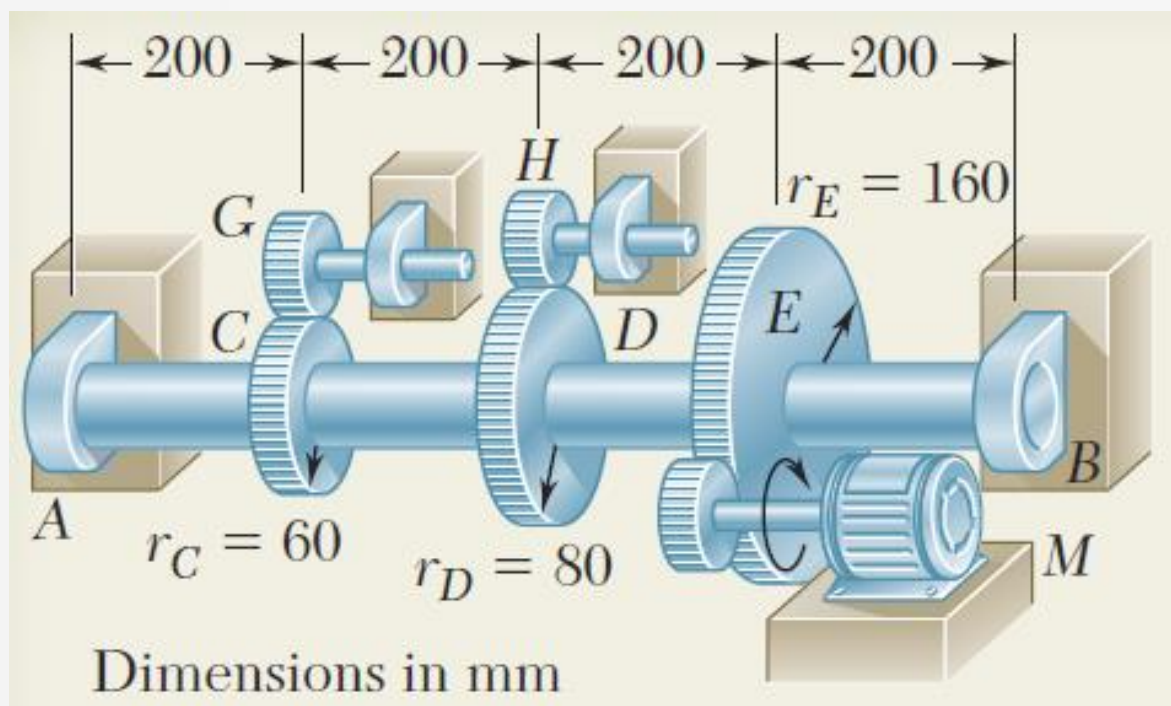
Carregamento combinado - Flexão Simples com Torção

Capítulo 5

Veios – Exemplo

O veio maciço AB gira a 480 rpm transmitindo 30 kW do motor M às máquinas a si ligadas pelas engrenagens G e H.

Em G são transmitidos 20 kW e em H 10 kW.



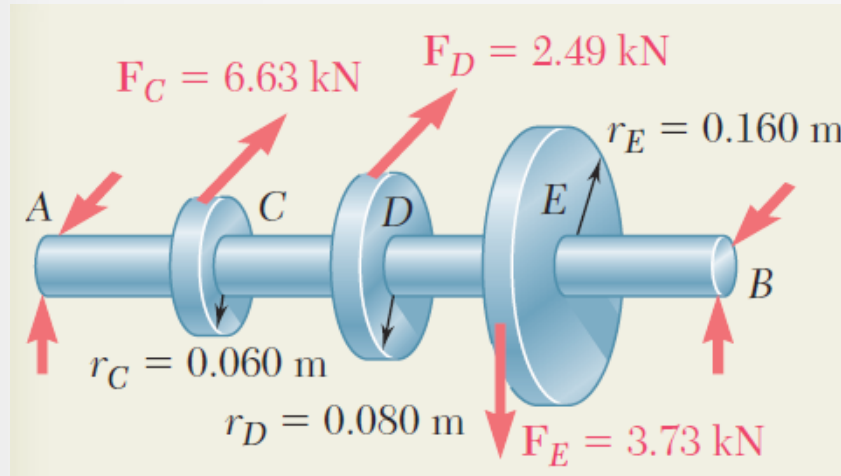
Determinar o menor diâmetro permitido para o veio AB sabendo que a tensão normal admissível é 100 MPa. Despreze o Esforço Transverso.



Carregamento combinado - Flexão Simples com Torção

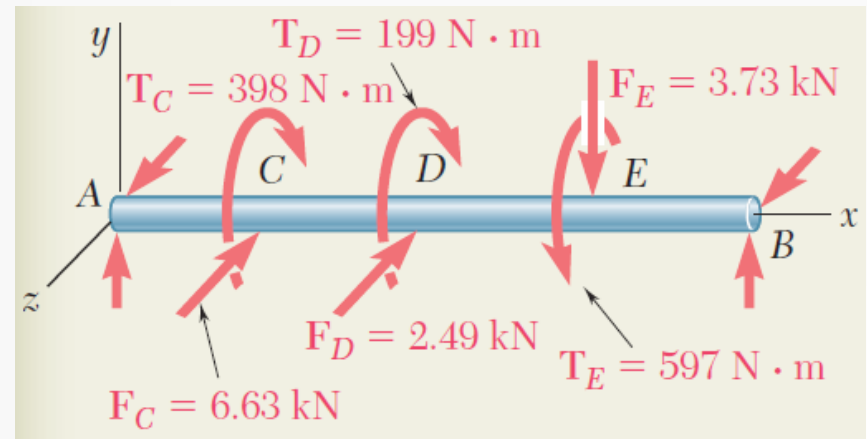
Veios – Exemplo

Com o conhecimento da potencia transmitida e da rotação do veio determinam-se as forças resultantes nas engrenagens.



Determinam-se os momentos torsores gerados pelas forças aplicadas às engrenagens.

Diagrama de corpo livre do veio

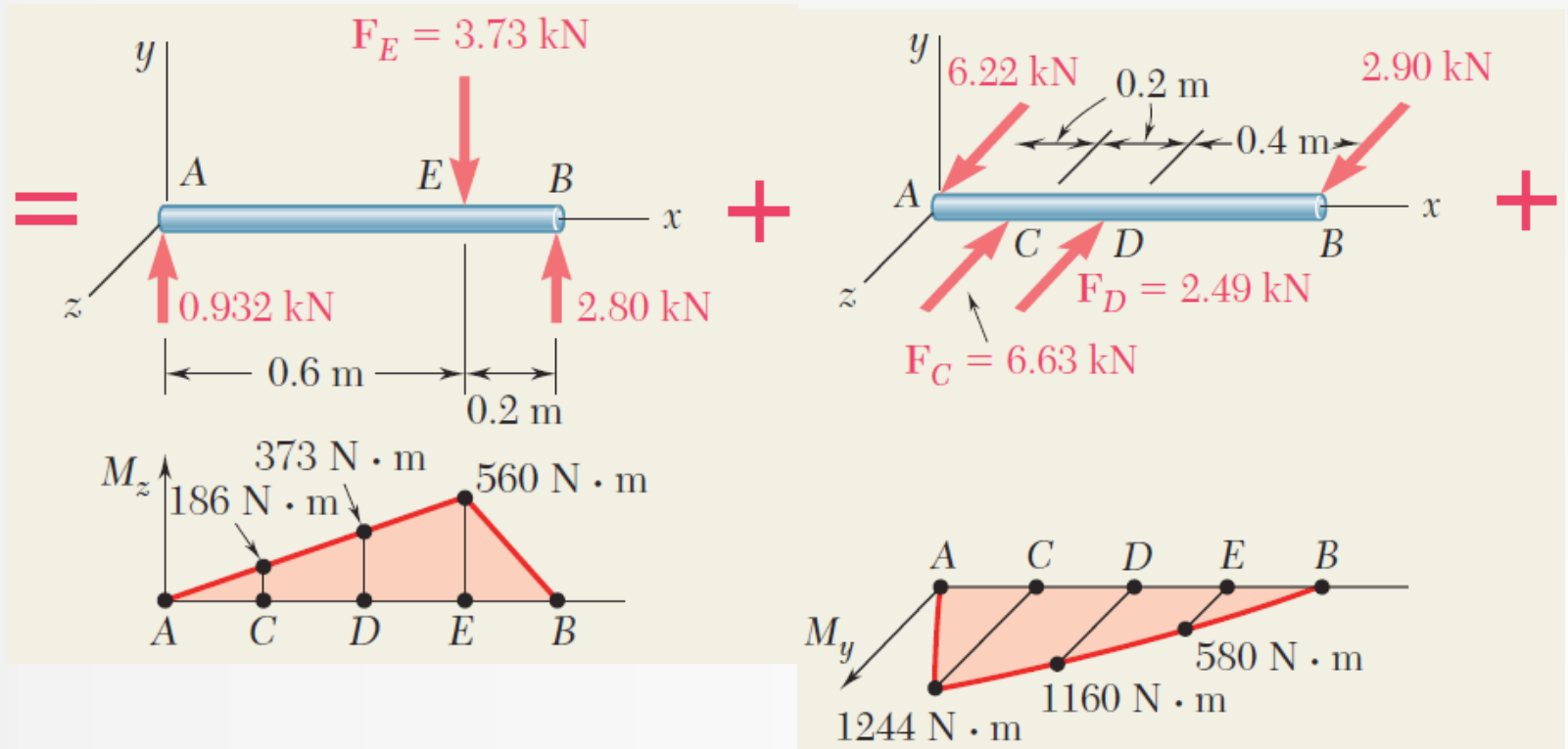




Carregamento combinado - Flexão Simples com Torção

Veios – Exemplo

Diagrama dos momentos fletores nos dois planos XY e XZ

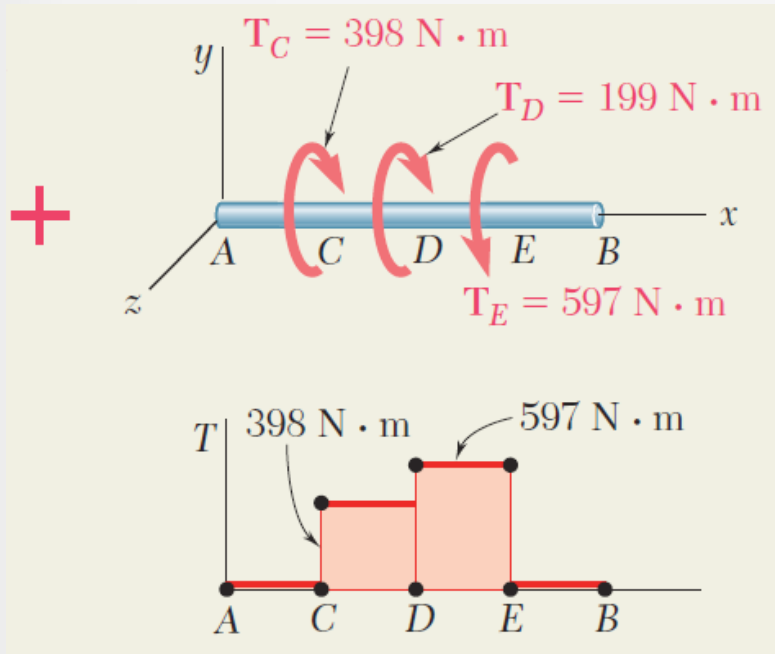




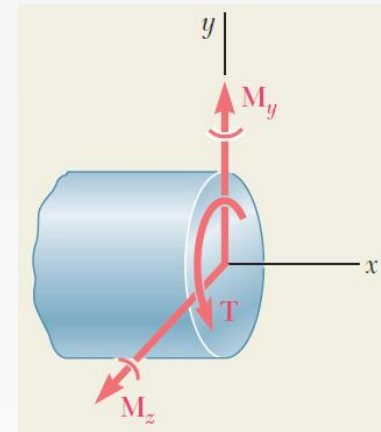
Carregamento combinado - Flexão Simples com Torção

Veios – Exemplo

Diagrama do momento torsor



A secção D é a mais solicitada



$$M^2 = M_y^2 + M_z^2$$

Condição de projeto:

$$\sigma_{eq} < \sigma_{adm} = 100 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + T^2} < \sigma_{adm}$$

$$\Rightarrow d > 51,7 \text{ mm}$$

Critério de Tresca

$$\sigma_{eq} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + T^2}$$



Carregamento combinado - Flexão Simples com Torção

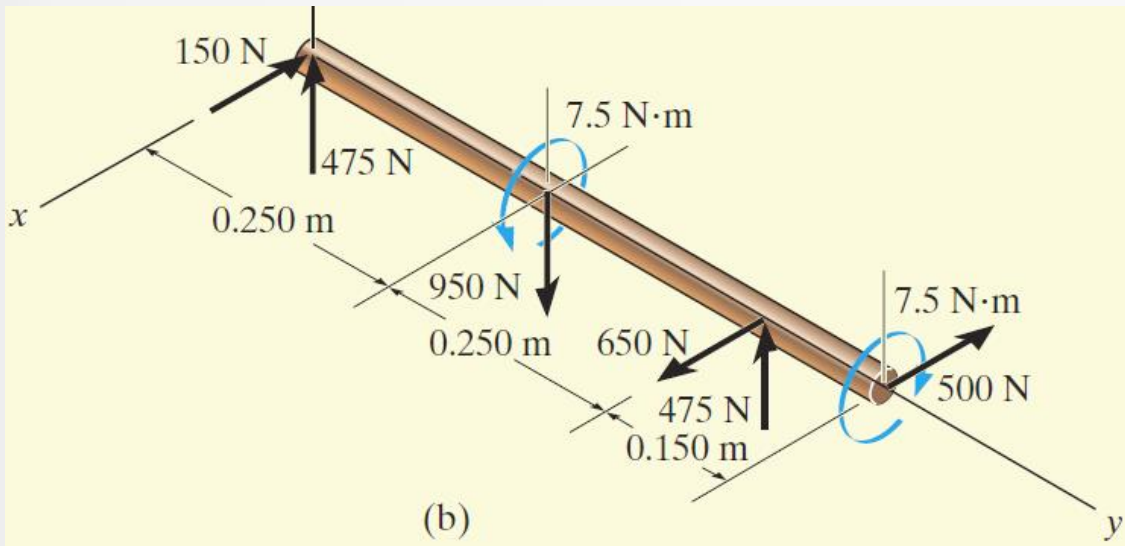
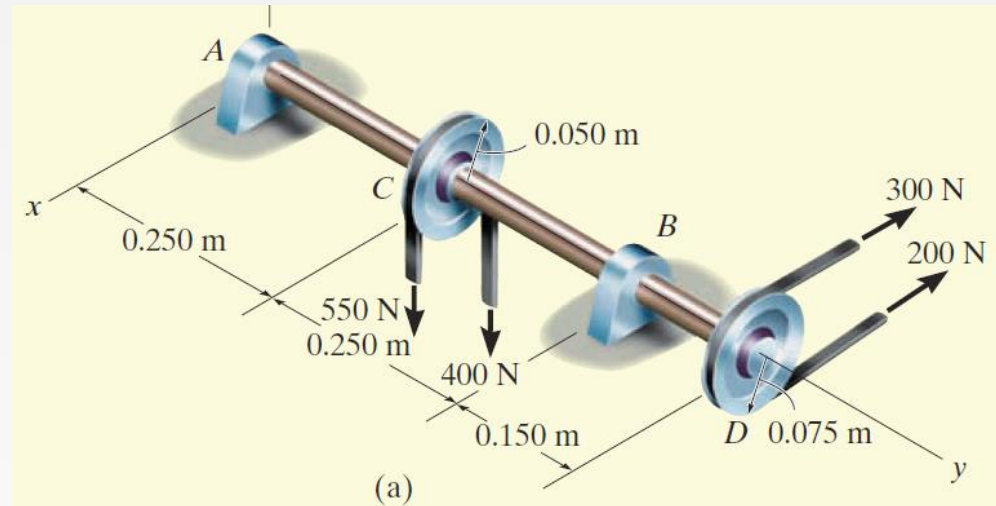
Capítulo 5

Veios – Exemplo

Determine o diâmetro mínimo segundo o Critério de Tresca.

Dados:

$$\sigma_{adm} = 100 \text{ MPa}$$

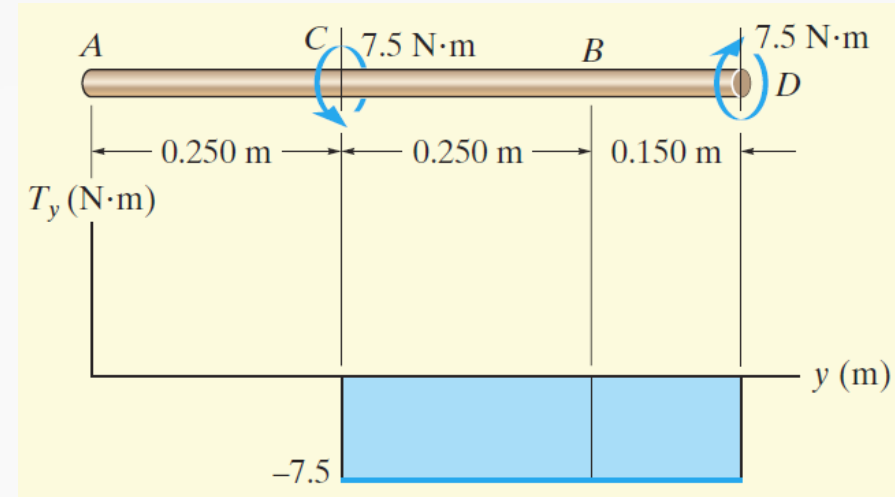
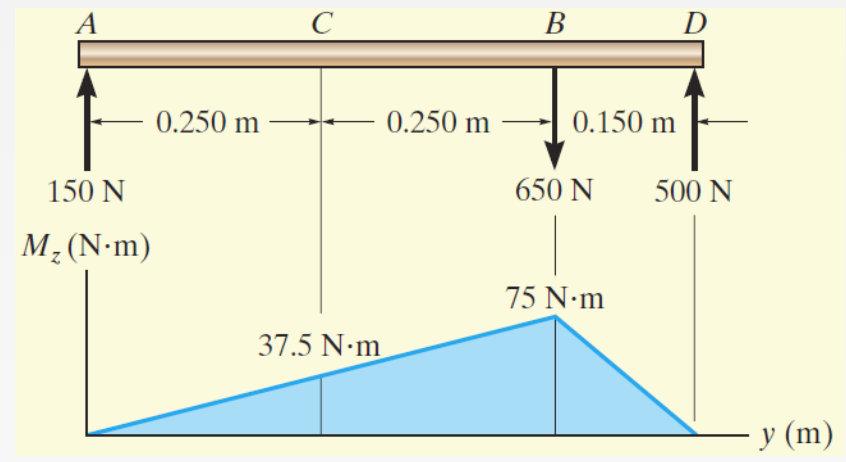
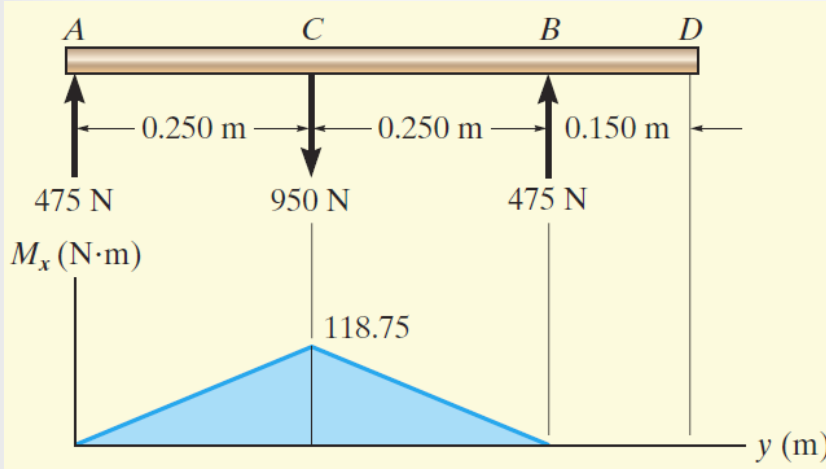


Resistência dos Materiais



Carregamento combinado - Flexão Simples com Torção

Veios - Exemplo



A secção C é a secção mais solicitada.

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_z^2} = 124,5 Nm$$

Critério de Tresca

$$\sigma_{eq} < \sigma_{adm} = 100 MPa$$

$$\Rightarrow \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + T^2} < \sigma_{adm} \Rightarrow d > 23,3 mm$$