

## MODELAÇÃO DINÂMICA DE UMA LIGAÇÃO APARAFUSADA

*Batista, F. C.<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup> Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Politécnico de Leiria, Leiria, Portugal

<sup>2</sup> Centro para o Desenvolvimento Rápido e Sustentado de Produto, Politécnico de Leiria, Marinha Grande, Portugal

[fernando.batista@ipleiria.pt](mailto:fernando.batista@ipleiria.pt);



### RESUMO

Pretende-se identificar numericamente uma junta aparafusada através de uma abordagem dinâmica, avaliando as respostas experimentais e os resultados obtidos pelas respostas de um conjunto de modelos de elementos finitos desenvolvido num programa comercial.

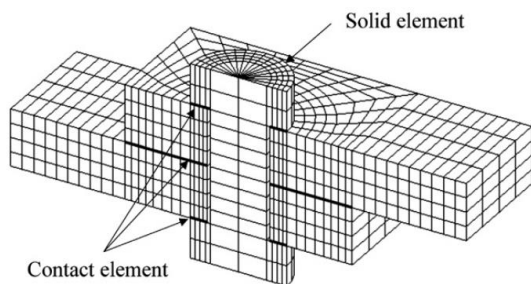
É feita a avaliação do melhor modelo fazendo uma comparação direta com as respostas dinâmicas obtidas experimentalmente. Esta comparação é quantificada por técnicas de correlação de funções de resposta em frequência (FRF) entre as respostas experimentais e as respostas simuladas numericamente.

Os modelos terão em conta o cone de aperto, gerado pela pretensão de uma ligação aparafusada simples, e as duas superfícies das duas vigas que fazem parte da ligação.

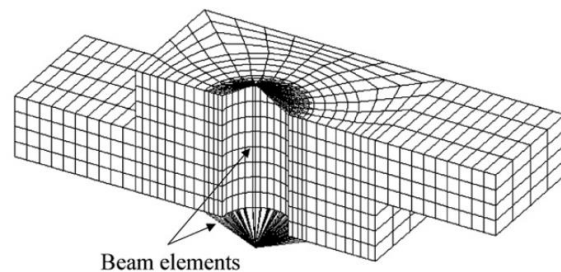
Palavras-chave: junta aparafusada / FRF / correlação / ligação / modelo / Elementos Finitos

## 1. INTRODUÇÃO

Na literatura encontramos muitos trabalhos que tentam criar modelos mais ou menos complexos de juntas aparafusadas. Há modelos estruturais 3D complexos do parafuso (exemplo, Figura 1) que tem como preocupação caracterizar a rigidez e/ou a resistência estrutural da ligação (por exemplo: Wileman *et al.* 1991, Ireman 1998, Kim *et al.* 2007, Wang *et al.* 2017). Por outro lado, temos modelos mais simples constituídos por um conjunto de vigas ligadas às extremidades de uma viga central (exemplo, Figura 2) utilizada por varos autores (por exemplo: Kim *et al.* 2007, Giannella *et al.* 2021) e que recentemente também é usado em módulos gráficos nos softwares de elementos finitos comerciais mais avançados.



**Figura 1 – Modelo 3D, Kim *et al.* 2007**



**Figura 2 – Modelo de vigas, Kim *et al.* 2007**

As superfícies de contacto entre as duas vigas geram esforços de atrito relevantes que são objeto de estudos por vários autores (Gaul L. e Lenz, J., 1997, Iranzad, M. and Ahmadian, H., 2012, Yuan. *et al.* 2018) este aspeto não foi considerado no presente estudo.

Neste trabalho foi utilizado o programa de elementos finitos comercial ANSYS (2009) porque é bastante fácil criar modelos complexos com uma interface gráfica bastante amigável. No pós-processamento, onde são tratados os outputs, o programa está um pouco limitado, foi utilizado o Matlab<sup>®</sup> (2011) para tratar esses dados.

Na nossa situação, o processamento recai no cálculo numérico das frequências naturais, dos modos e as FRF. Para a obtenção das frequências naturais e dos modos foi utilizado o modo de processamento “Modal Analysis”. Para determinar as FRF nas gamas pretendidas e perante uma estrutura nas condições de livre no espaço, utilizou-se o processamento “Harmonic Response” com o método de cálculo “Harmonic Response Mode Superposition Analysis”. Este método utiliza as características modais da análise geradas pelo modo de processamento “Modal Analysis” utilizado para o cálculo das frequências naturais e dos modos.

Para representar a excitação na estrutura, foi imposta uma força harmónica com amplitude unitária no nó onde foi aplicado experimentalmente a força excitadora. Assim, as respostas lidas nos nós escolhidos representam as FRF pretendidas.

Para identificar um modelo mais adequado para uma junta aparafusada foi escolhida uma ligação simples de um só parafuso/porca que liga duas vigas de geometria simples.

## 2. FORMULAÇÃO TEÓRICA

A modelação dinâmica é um processo de conversão de um problema de engenharia num modelo matemático, através do qual as principais características de vibração do problema original podem ser previstas com alguma precisão. As características principais desse modelo matemático são a inércia, a rigidez, o amortecimento, as forças aplicadas e as condições de fronteira.

Um sistema dinâmico pode ser uma estrutura, um mecanismo, um componente de máquina, um sistema mecânico, um vibrador, um misturador, uma máquina rotativa, etc. Estes sistemas são vulgarmente caracterizados por um conjunto de elementos estruturais simples, aos quais está associado uma inércia, uma rigidez e por vezes o elemento dissipador de energia, um amortecimento. Estes elementos são definidos no espaço, em relação a um sistema de eixos, pelos designados graus de liberdade do sistema. Este sistema, que pode ser contínuo ou não, está sujeito geralmente a cargas variáveis no tempo,  $f(t)$ , aplicadas nesses graus de liberdade. Por outro lado, podemos caracterizar estes sistemas dinâmicos em três modelos diferentes, Modelo Espacial, Modelo Modal e Modelo de Resposta em Frequência. (Maia *et al.* 1997). Estes três modelos podem ser relacionados pelas equações identificadas nos blocos da Figura 3.

### 2.1. Modelo Espacial

Esta caracterização dinâmica é a mais utilizada para problemas simples. Este modelo é construído com o conhecimento da distribuição espacial das matrizes de massa  $\mathbf{M}$ , de rigidez  $\mathbf{K}$  e de amortecimento viscoso  $\mathbf{C}$  (ou de amortecimento histerético  $\mathbf{D}$ ). Estas matrizes vão ter a dimensão igual ao número de graus de liberdade  $N$ , que vamos considerar para caracterizar o nosso sistema que em cada instante  $t$  é posicionado pelo vetor de deslocamento  $x(t)$ . Do equilíbrio de forças dinâmicas identificadas no sistema podemos escrever a Eq. (1) caso tenhamos amortecimento viscoso.

$$\mathbf{M}\ddot{x}(t) + \mathbf{C}\dot{x}(t) + \mathbf{K}x(t) = f(t) \quad (1)$$

Caso o amortecimento seja histerético temos, Eq. (2).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + i\mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2)$$

Na maioria das situações estes dois tipos de amortecimento são assumidos como proporcionais, isto é, assume-se que são uma combinação linear da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  e da matriz de massa  $\mathbf{M}$ ,

$$\mathbf{C} = \beta\mathbf{K} + \alpha\mathbf{M} \quad \mathbf{D} = \mu\mathbf{K} + \theta\mathbf{M} \quad (3)$$

Estas constantes vão permitir identificar o fator de amortecimento associado a cada frequência natural para cada um dos casos,

$$\xi_r = \frac{\alpha}{2\omega_r} + \frac{\beta\omega_r}{2} \quad \eta_r = \mu + \frac{\theta}{\omega_r^2} \quad (4)$$

## 2.2. Modelo Modal

O modelo anterior sem amortecimento pode ser descrito por um problema generalizado de valores e vetores próprios,

$$(\mathbf{K} - \lambda^2\mathbf{M})\mathbf{X} = 0 \quad (5)$$

A solução do problema representado pela equação (5) conduz a  $N$  valores próprios, são as frequências naturais do sistema e a  $N$  vetores próprios, que representam os modos de vibração. As frequências naturais ao quadrado podem ser agrupadas numa matriz diagonal  $\Lambda = [\lambda_r^2]$  e os modos normalizados relativamente à matriz de massa colocados nas colunas de uma matriz  $\Phi$ . Para sistemas com amortecimento viscoso temos  $\lambda_r^2 = \omega_r^2$  e para sistemas com amortecimento histerético temos  $\lambda_r^2 = \omega_r^2(1 + i\eta_r)$ .

São verificadas as propriedades de ortogonalidade (em relação às matrizes de massa e rigidez) da matriz modal  $\Phi$  para os dois tipos de amortecimentos,

$$\begin{cases} \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \\ \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \\ \Phi^T (\mathbf{K} + i\mathbf{D}) \Phi = \Lambda \end{cases} \quad (6)$$

Pelo facto da matriz modal ser ortogonal significa que é sempre invertível, pois tem as colunas (ou seja, os modos) linearmente independentes. Assim, da equação (6) podemos determinar as características espaciais utilizando o conhecimento das características modais,  $\Phi$  e  $\Lambda$ .

### 2.3. Modelo de Resposta em Frequência

Este modelo tem sido bastante utilizado ultimamente, pois permite caracterizar de forma mais fácil estruturas mais complexas.

Na possibilidade de excitarmos a nossa estrutura por uma força harmónica, podemos reescrever a equação (2),

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\mathbf{D})\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (7)$$

Em que  $\bar{\mathbf{X}}$  e  $\bar{\mathbf{F}}$  são as amplitudes complexas da resposta e da força, respectivamente, em regime estacionário.

As matrizes de receptância e de rigidez dinâmica, designadas por  $\mathbf{H}(\omega)$  e  $\mathbf{Z}(\omega)$ , são definidas da seguinte forma:

$$\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{Z}(\omega))^{-1} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\mathbf{D})^{-1} \quad (8)$$

Na eventualidade da grandeza medida do sistema ser a velocidade estamos perante a mobilidade,  $\mathbf{Y}(\omega)$ . Em termos experimentais o que geralmente é medido é a aceleração; nesse caso, estamos perante a aceleração,  $\mathbf{A}(\omega)$ . Com o conhecimento de uma delas é fácil determinar as outras utilizando as relações matemáticas de derivação. Cada elemento destas matrizes tem a designação de Função de Resposta em Frequência, FRF.

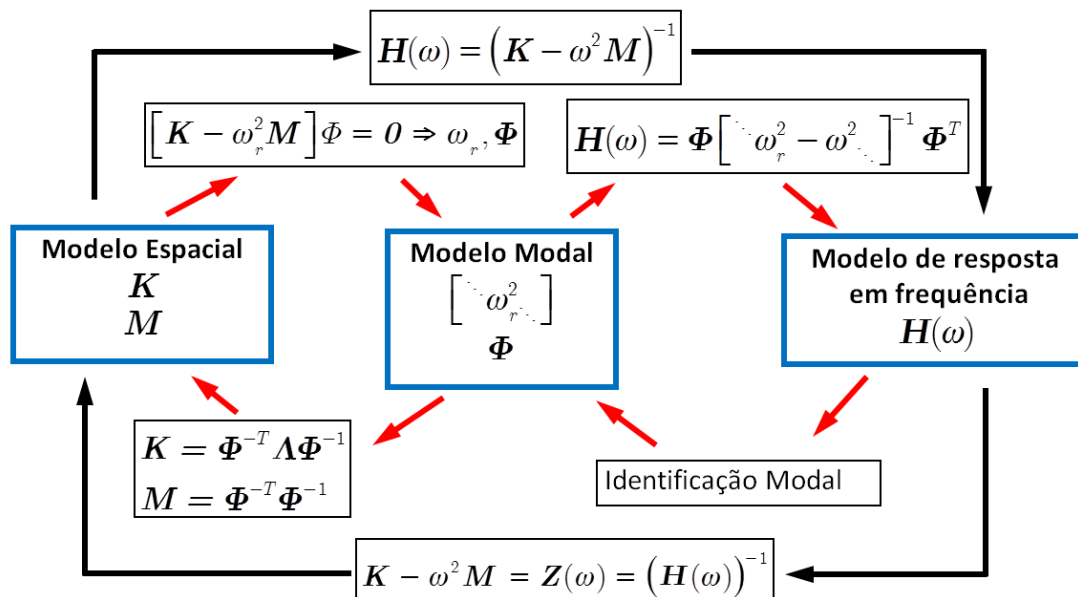


Figura 3 - Relação entre os três modelos dinâmicos (sem amortecimento), Batista, F.C., 2012

## 2.4. Critérios de correlação

A simples comparação gráfica das FRF calculadas por modelos numéricos ( $H_A(\omega)$ ) com as obtidas por técnicas experimentais ( $H_X(\omega)$ ) apenas nos dá uma ideia qualitativa entre FRF. Há, portanto, necessidade de quantificar em valores numéricos essas diferenças. Com a facilidade atual de determinar FRF surgiram vários índices de correlação que quantificam essas diferenças. Cada um quantifica essas diferenças de uma determinada forma, levando à utilização de cada índice de correlação a ser aplicado a cada problema específico.

A comparação entre modos de vibração é também uma das tarefas importantes quando os modelos são baseados em características modais medidas. A correspondência entre os modos pode ser uma tarefa muito difícil especialmente para estruturas com altas densidades modais.

Allemang e Brown (1982) apresentaram em um dos critérios mais utilizados, o *Modal Assurance Criterion* (MAC), definido como

$$MAC(i, j) = \frac{|\{\Psi_A\}_i^H \{\Psi_X\}_j|^2}{(\{\Psi_A\}_i^H \{\Psi_A\}_i)(\{\Psi_X\}_j^H \{\Psi_X\}_j)} \quad (9)$$

onde  $\{\Psi_A\}_i$  representa o modo  $i$  do modelo numérico, e  $\{\Psi_X\}_j$  representa o modo  $j$  medido experimentalmente e o expoente “H” significa Hermitiano (complexo conjugado transposto). A correlação obtida terá valores entre 0 e 1.

O modo  $\{\Psi_A\}_i$  estará bem relacionado com o modo  $\{\Psi_X\}_j$  se o respetivo  $MAC(i, j)$  tiver um valor próximo de 1.

Por outro lado, Grafe (1998) nos seus trabalhos de *updating* entrou em conta com a necessidade de correlacionar as FRF de forma global e local. Assim definiu dois critérios globais que utilizou no seu modelo de *updating* e um critério local.

O critério global, o *Global Shape Criterion* (GSC), é definido como

$$GSC(\omega, j) = \frac{|\{H_A(\omega)\}_j^H \{H_X(\omega)\}_j|^2}{(\{H_A(\omega)\}_j^H \{H_A(\omega)\}_j)(\{H_X(\omega)\}_j^H \{H_X(\omega)\}_j)} \quad (10)$$

onde  $\{H_X(\omega)\}_j$  representa a coluna  $j$  de  $H_X(\omega)$  à frequência  $\omega$ .

Estes critérios dão relevância ao processo de aquisição das FRF. Para uma situação experimental em que é utilizado o elemento excitador fixo numa coordenada e em cada coordenada um sensor para medir a resposta dinâmica, a aplicação destes critérios pode de certa forma dar-nos uma ideia da “correta” colocação do elemento excitador.



Ambos estes critérios mostram um valor entre 0 e 1 para cada frequência. Podemos determinar a média destes valores ao longo da gama de frequência e ter assim quantificado num só valor a correlação entre FRF associadas à coordenada  $j$ . No caso da correlação GSC temos,

$$\overline{GSC}(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N GSC(\omega_k, j) \quad (12)$$

Outro critério sugerido por Grafe (1998) é o *Local Amplitude Criterion* (LAC), assim definido:

$$LAC(\omega, i, j) = \frac{2|H_{Xij}(\omega)^* \cdot H_{Aij}(\omega)|}{(H_{Xij}(\omega)^* \cdot H_{Xij}(\omega)) + (H_{Aij}(\omega)^* \cdot H_{Aij}(\omega))} \quad (13)$$

onde  $i$  e  $j$  são as coordenadas da resposta e a excitação, respetivamente.  $H_{Aij}(\omega)$  é a FRF obtida numericamente e  $H_{Xij}(\omega)$  obtida experimentalmente, o expoente \* significa o complexo conjugado. Esta correlação também terá valores entre 0 e 1 para cada frequência  $\omega$ .  $H_{Xij}(\omega)$  estará bem relacionada com  $H_{Aij}(\omega)$  se o respetivo  $LAC(\omega, i, j)$  tiver todos os valores próximos de 1. Podemos também aqui determinar a média destes valores e ter assim quantificado num só valor a correlação entre FRF:

$$\overline{LAC}(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N LAC(\omega_k, i, j) \quad (13)$$

### 3. CASO DE ESTUDO

Foi escolhido um acoplamento de vigas simples ligadas com um parafuso sextavado interior e uma porca de rosca métrica M10 apertado com um momento de 50 Nm. A estrutura ficou suspensa simulando condições de livre no espaço. As solicitações foram aplicadas com um martelo instrumentado e as respostas foram medidas com acelerómetro.

Foram escolhidas algumas coordenadas de interesse. Na Figura 4 podemos ver esta estrutura com as várias coordenadas de translação e de rotação de interesse no plano  $xz$ . Apenas as coordenadas deste plano é que foram consideradas no estudo.

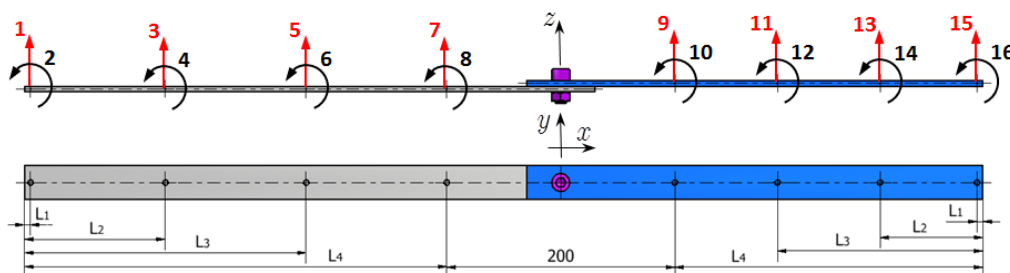


Figura 4 - Acoplamento de vigas

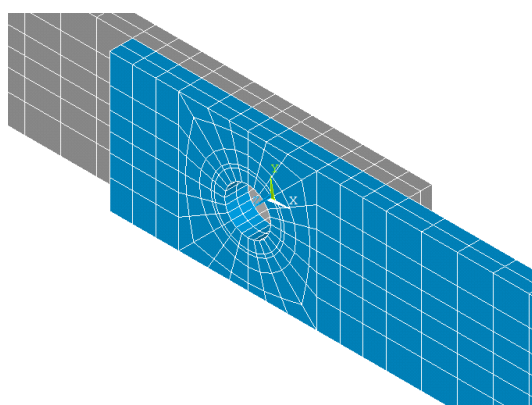
As várias posições das coordenadas de interesse estão indicadas na Figura 4 e na Tabela 1. Os quatro pontos de medição das translações em cada viga correspondem às coordenadas 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 15. A junta é representada pela subestrutura compreendida entre a coordenada 7 e 9.

**Tabela 1 – Dados geométricos do acoplamento em milímetros**

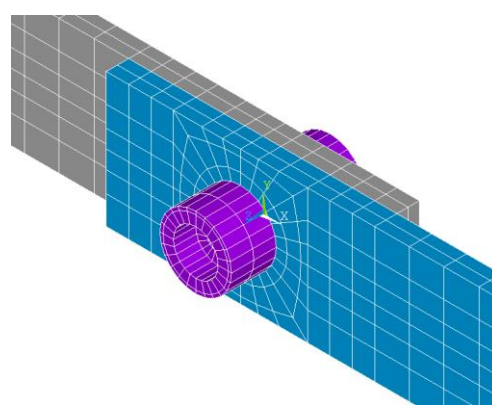
Viga	L	b	t	S	L1	L2	L3	L4
V1	500	30	5	30	5	123.3	246.7	370
V2	400	30	5	30	5	90.0	180.0	270

### 3.1. Elementos finitos

Foram definidos 13 modelos de ligação entre as duas vigas, 6 modelos onde há apenas ligações rígidas entre nós das duas vigas distribuídos em circunferências concêntricas com o furo (Figura 5 e Figura 7) e mais 7 modelos que entram em conta com as mesmas ligações e adiciona uma ligação rígida do parafuso ao modelo das duas vigas, Figura 6.



**Figura 5 - Ligação sem parafuso**



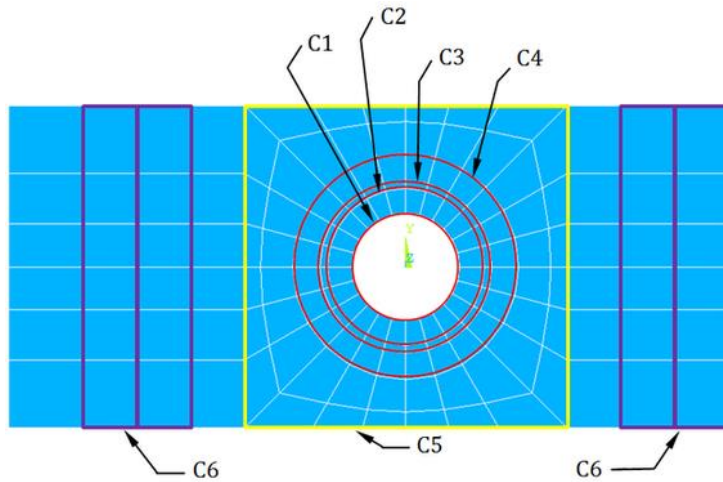
**Figura 6 - Ligação com parafuso**

Estas ligações rígidas consistem em atribuir os mesmos graus de liberdade aos nós comuns das duas estruturas. Na Figura 7 e Figura 8 podemos ver as linhas que unem o conjunto de nós de cada ligação C1-C6 e da ligação C7 respetivamente. Cada modelo de ligação usa uma combinação destas ligações como está indicado na Tabela 2.

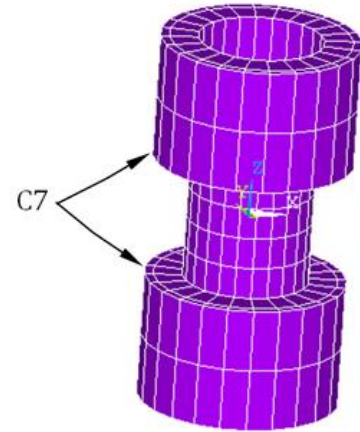
O efeito de aperto da ligação aparafusada desenvolve um cone de pressão sobre os elementos a unir; este efeito dá origem a uma pressão localizada numa coroa com um determinado diâmetro, Figura 9. Esse diâmetro é função do diâmetro da cabeça do parafuso ou do diâmetro de contacto da porca e também de um ângulo que relaciona estes diâmetros



com o diâmetro da coroa de pressão. Este ângulo é objeto de vários estudos, embora seja consensual admitir um ângulo de 30°, Shigley (1986).



**Figura 7 - Zonas das ligações C1-C6**



**Figura 8 - Ligação C7**

O diâmetro da coroa de pressão representa a ligação C4 da Figura 7 e foi tomado um valor médio para esse diâmetro de 21 mm, indicado como diâmetro D4 na Figura 9.

**Tabela 2 - Ligações dos 13 modelos**

Modelo	∅ [mm]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ligação C1	10	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x
Ligação C2	14,6		x	x	x	x	x			x	x	x	x	x
Ligação C3	16			x	x	x	x				x	x	x	x
Ligação C4	21				x	x	x					x	x	x
Ligação C5	---					x	x						x	x
Ligação C6	---						x							x
Ligação C7	14,6/16							x	x	x	x	x	x	x

As ligações C2 e C3 representam os diâmetros da porca e da cabeça do parafuso, respetivamente.

Como exemplo, na Figura 10 está representado a ligação do modelo 7, onde é visível a ligação C7, constituída por uma ligação rígida nó a nó indicada a verde.

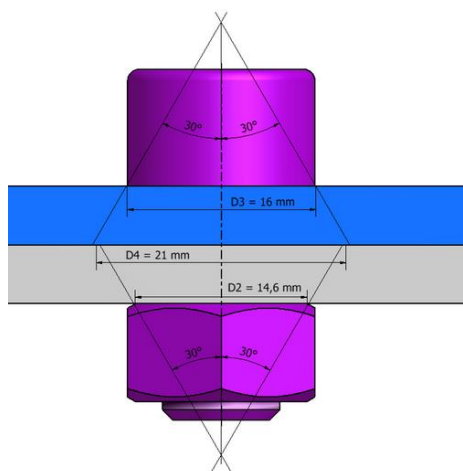


Figura 9 - Cone de pressão do parafuso

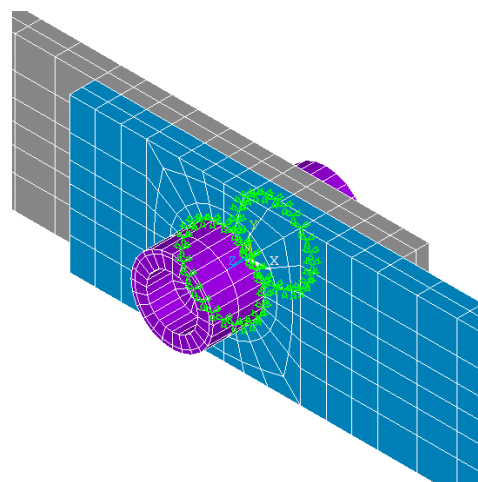


Figura 10 - Ligação do modelo 7

### 3.2. Resultados

Depois de determinar as características do material das vigas, foi feita uma análise entre as FRF experimentais da estrutura e os 13 modelos numéricos. Esta análise consistiu em comparar um conjunto de correlações de entre os resultados experimentais e os numéricos.

Foi utilizado a correlação *Global Shape Criterion* (GSC) médio para poder facilmente comparar os modelos entre si. Depois de escolher os modelos com melhor resultado, foi realizada uma correlação local utilizando o *Local Amplitude Criterion* (LAC) médio.

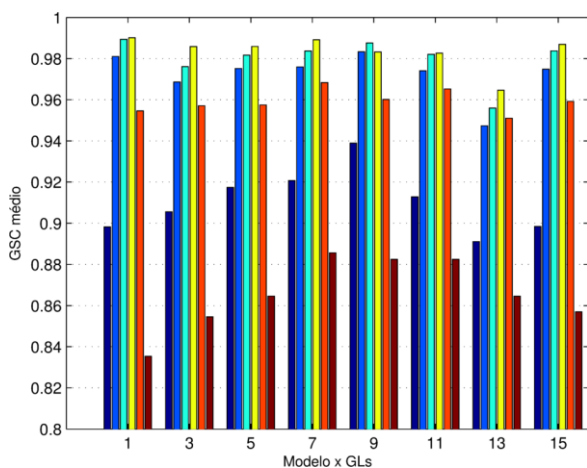


Figura 11 - Correlação GSC média dos modelos 1, 2, 3, 4, 5 e 6

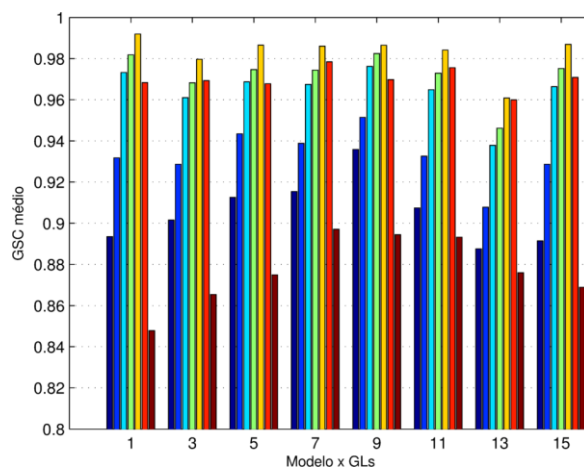


Figura 12 - Correlação GSC média dos modelos 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13

Na Figura 11 e Figura 12 podemos observar o GSC médio dos 13 modelos. Verifica-se que o modelo 4 e o modelo 11 apresentam valores mais próximos de 1 para todos os graus de

liberdade. Se analisarmos a Tabela 2 podemos ver que estes dois modelos são constituídos pelas ligações C1, C2, C3 e C4. O modelo 11 tem em relação ao modelo 4 apenas o parafuso com a ligação 7 (Figura 10).

Na Figura 13 e Figura 14 podemos ver a evolução da correlação GSC ao longo da gama de frequência. Verifica-se, para os dois modelos, que a correlação se degrada ao longo do espectro de frequências e a partir dos 1400 Hz há um aumento significativo da degradação, que é mais significativa para o modelo 11.

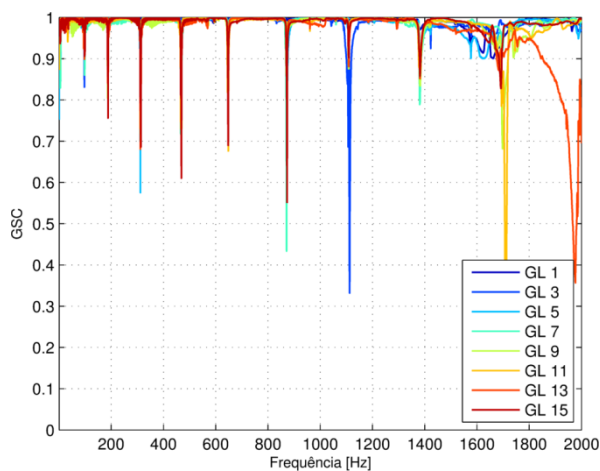


Figura 13 - Correlação GSC - modelo 4

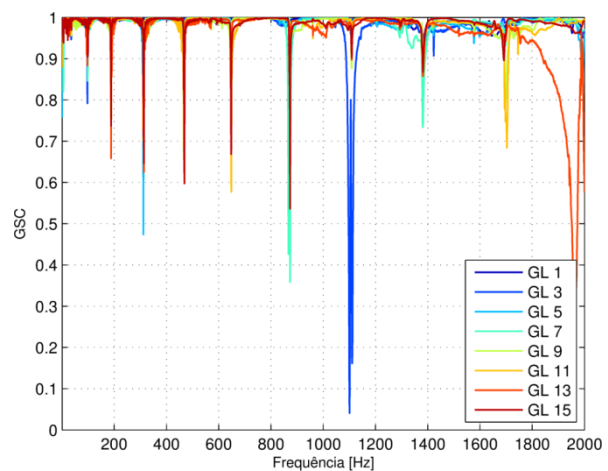


Figura 14 - Correlação GSC - modelo 11

Na Figura 15 e Figura 16 estão representadas as correlações LAC média dos modelos 4 e 11, respetivamente. O modelo 4 apresenta melhor correlação para todos os GL do que o modelo 11.

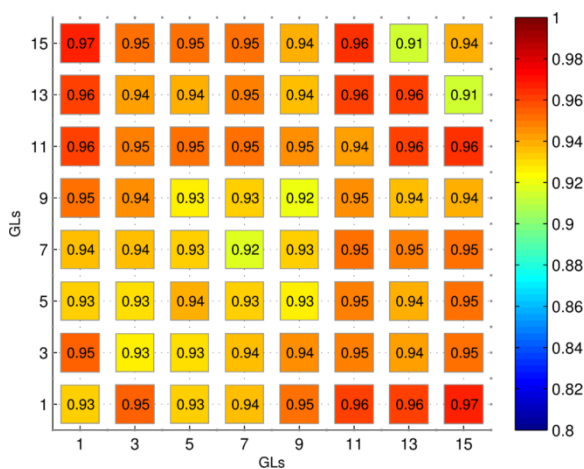


Figura 15 - Correlação LAC média - modelo 4

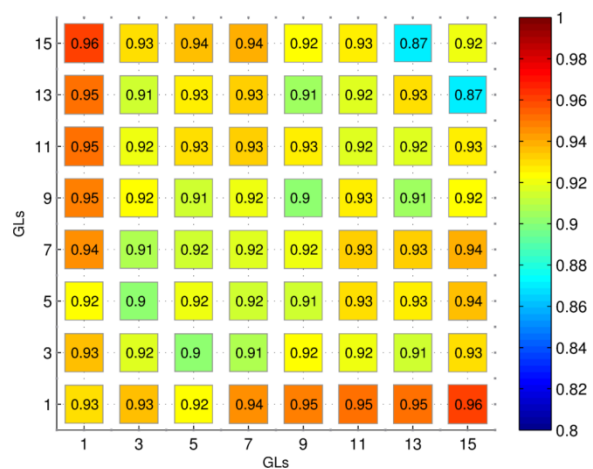


Figura 16 - Correlação LAC média - modelo 11

### 3.3. Conclusão

Dos 13 modelos numéricos apresentados, o modelo 4 foi o que mostrou a melhor correlação. Tanto o modelo 4 como o modelo 11 são os únicos que têm como ligação entre as vigas as ligações C1, C2, C3 e C4. Este conjunto de ligações representa o efeito do cone de aperto (Figura 9).

Podemos concluir que para esta situação em particular, para modelar numericamente a junta basta unir rigidamente os nós da coroa de contacto entre as duas vigas, sendo esta coroa definida pelo furo e pelo diâmetro do cone de aperto.

### REFERÊNCIAS

- Matlab, 2001, The MathWorks, Inc.
- Maia, N. M., J. M. Silva, J. He, N. A. J. Lieven e R. M. Lin, 1997. Theoretical and Experimental Modal Analysis, Taunton, Somerset: Reserch Studies Press, Ltd,
- Allemang, R. J., Brown, D.L., 1982, A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis, Proceedings, International Modal Analysis Conference, pp.110-116.
- Grafe, H., 1998, Model Updating of Large Structural Dynamics Models Using Measured Response Functions, U.K.
- Shigley, J.E, 1986, Mechanical Engineering Design, 1st Metric Edition, McGraw Hill
- ANSYS Release 9.0, (2004), Ansys Inc, Houston, PA.
- Kim, J., Yoon, J. Cheol, Kang, B., 2007, Finite element analysis and modeling of structure with bolted joints, Applied Mathematical Modelling, Volume 31, Issue 5, May, pp. 895-911
- Ireman, T, 1998, Three-dimensional stress analysis of bolted single-lap composite joints, Composite Structures, pp. 195-216
- Wileman, J., Choudhury, M., Green, I., 1991, Computation of Member Stiffness in Bolted Connections, Journal of Mechanical Design
- Wang, Y.-Q., Wu, J.-K., Liu, H.-B., Kuang, K., Cui, X.-W, Han, L.-S, 2017, Analysis of elastic interaction stiffness and its effect on bolt preloading, International Journal of Mechanical Sciences
- Giannella, V., Sepe, R., Citarella, R., Armentani, E., 2021, FEM modelling approaches of bolt connections for the dynamic analyses of an automotive engine, Applied Sciences (Switzerland)
- Gaul, L. and Lenz, J., 1997, Nonlinear dynamics of structures assembled by bolted joints, Acta Mechanica, pp. 169-181
- Yuan, P., and Ren, W. and Zhang, J., 2019, Dynamic tests and model updating of nonlinear beam structures with bolted joints, Mechanical Systems and Signal Processing
- Iranzad, M. and Ahmadian, H., 2012, Identification of nonlinear bolted lap joint models, Computers & Structures
- Batista, F.C., 2012. Caracterização Dinâmica de Juntas Aparafusadas, Tese de Doutoramento, Técnico, Universidade de Lisboa.