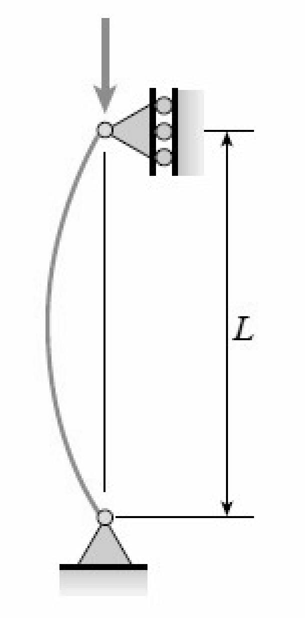
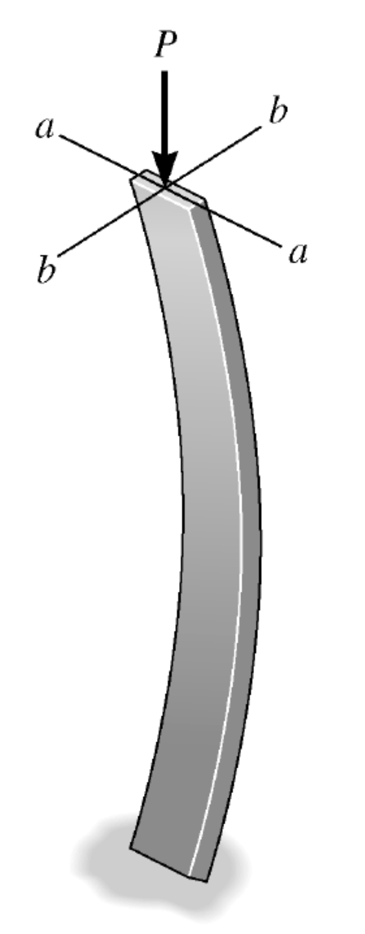
Fundamentos de Mecânica dos Materiais

Capítulo 6

- Estabilidade de estruturas





Acetatos e imagens baseados nos livros:
- Mechanics of Materials - Beer & Jonhson
- Mecânica e Resistência dos Materiais – V. Dias da Silva
- Resistência dos Materiais, R.C. Hibbeler

Fernando Batista - Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Leiria - 2016

Índice

Noção de instabilidade axial - Flambagem

Exemplos

- Coloque uma régua de pé sobre uma mesa e exerça uma força vertical no topo da régua. A medida que aumenta a força a régua vai iniciar um processo de flexão encurvando a régua. Se continuar a aumentar a força a régua irá quebrar pois o plástico é um material frágil.

- Se colocar um pé sobre uma lata de 33cl vai reparar que ela será amaçada logo a partir de uma determinada força.

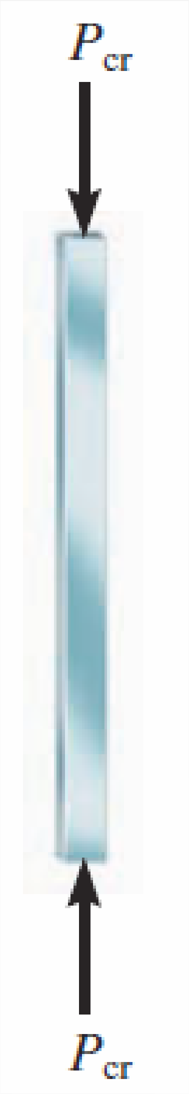
Noção de instabilidade axial - Flambagem

Colunas: Elementos estruturais compridos e esbeltos sujeitos a uma força axial de compressão.

Flambagem: Deflexão lateral que as colunas sofrem. Em geral a flambagem leva a uma falha repentina e dramática da estrutura.

Carga Crítica (P_{cr}) : É a carga axial máxima que uma coluna pode suportar antes de ocorrer a flambagem.

Qualquer carga adicional provocará flambagem na coluna.



Formula de Euler - Colunas

Determinação da Carga Crítica

Ao assumir uma carga de compressão significativa, a coluna vai fletir.
A equação diferencial do deslocamento y devido à flexão é dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

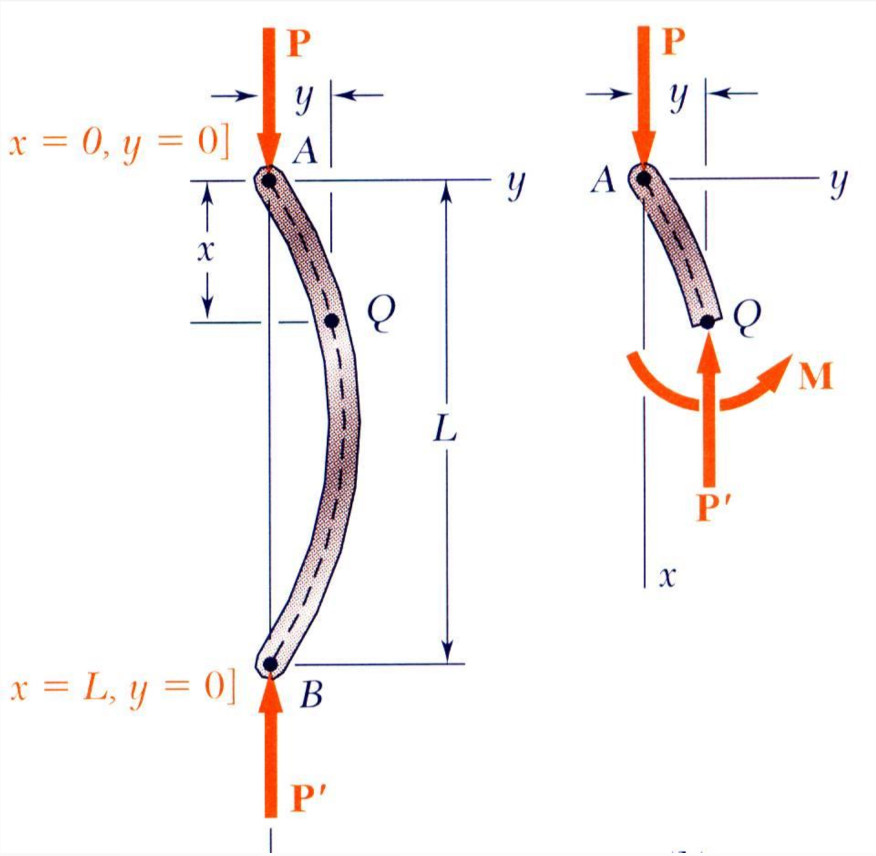
Em qualquer secção o momento fletor M é descrito por:

$$\mathrm{M} = -\mathrm{P} \cdot y$$

Assim temos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI}\right) y = 0$$

Coluna entre dois apoios fixos



I – Menor momento de inercia da secção

E – Módulo de Elasticidade do material

Formula de Euler - Colunas

Determinação da Carga Crítica

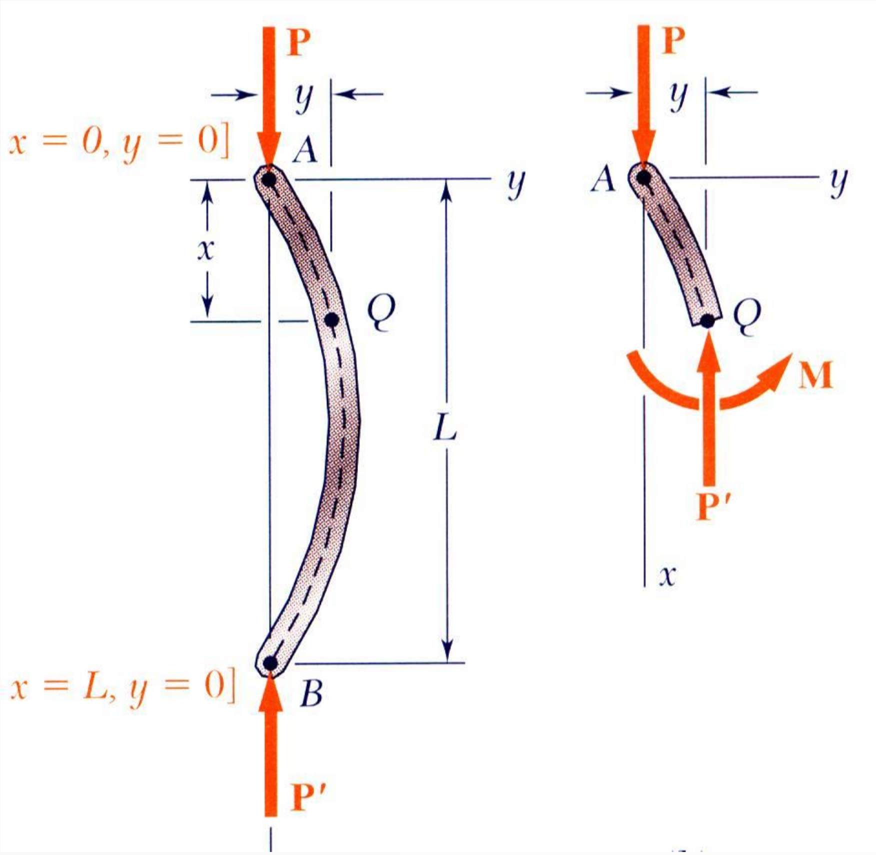
Esta equação diferencial tem a seguinte solução:

$$y = C_1 \cdot sen\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \cdot cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

Esta equação do deslocamento depende de duas constantes C_1e C_2 que podem ser determinadas com duas condições de fronteira:

$$y(0) = 0 \;\text{ e }\; y(L) = 0$$

Coluna entre dois apoios fixos



Com $y(0) = 0$ temos:

$$y = C_1 \cdot \cancelto{0}{sen(0)} + C_2 \cdot \cancelto{1}{cos(0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C_1 \cdot sen\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

Formula de Euler - Colunas

Determinação da Carga Crítica

$$y = C_1 \cdot sen\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

Com $y(L) = 0$ temos:

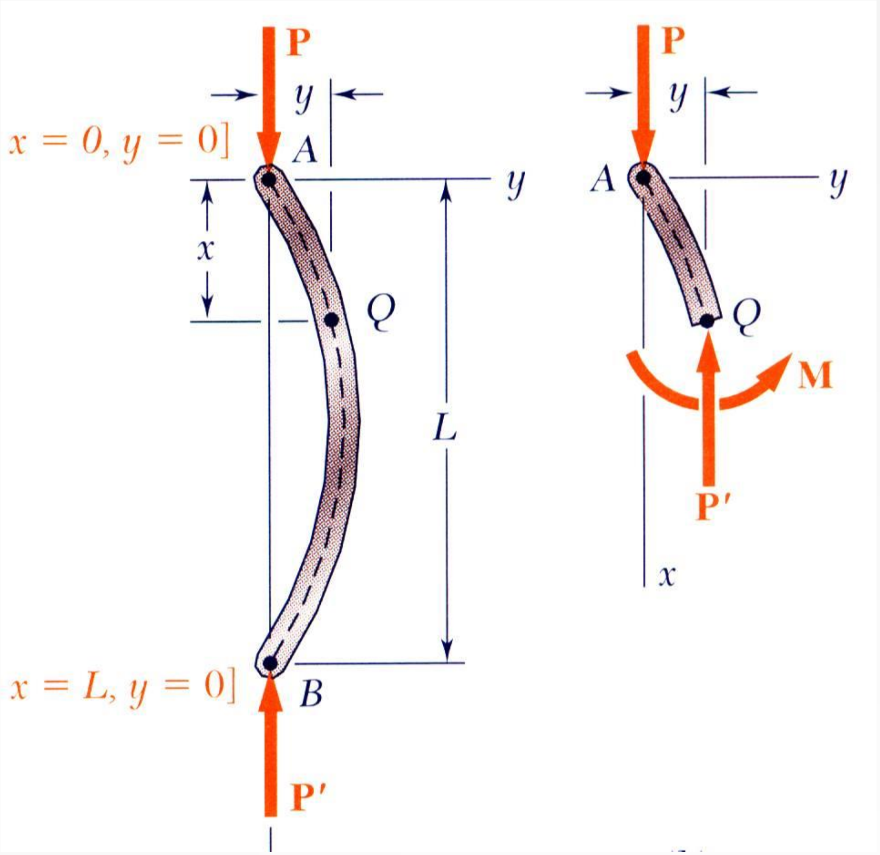
$$C_1 \cdot sen\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

Temos um produto entre dois valores logo temos duas condições, ou:

Condição 1: $C_1 = 0$ ou

Condição 2: $sen\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$

Coluna entre dois apoios fixos



Condição 1 - Se $C_1 = 0$ temos $y = 0$, ou seja, a coluna mantem-se vertical. Quando isto acontecer a Carga não será suficiente para criar instabilidade.

Formula de Euler - Colunas

Determinação da Carga Crítica

Condição 2

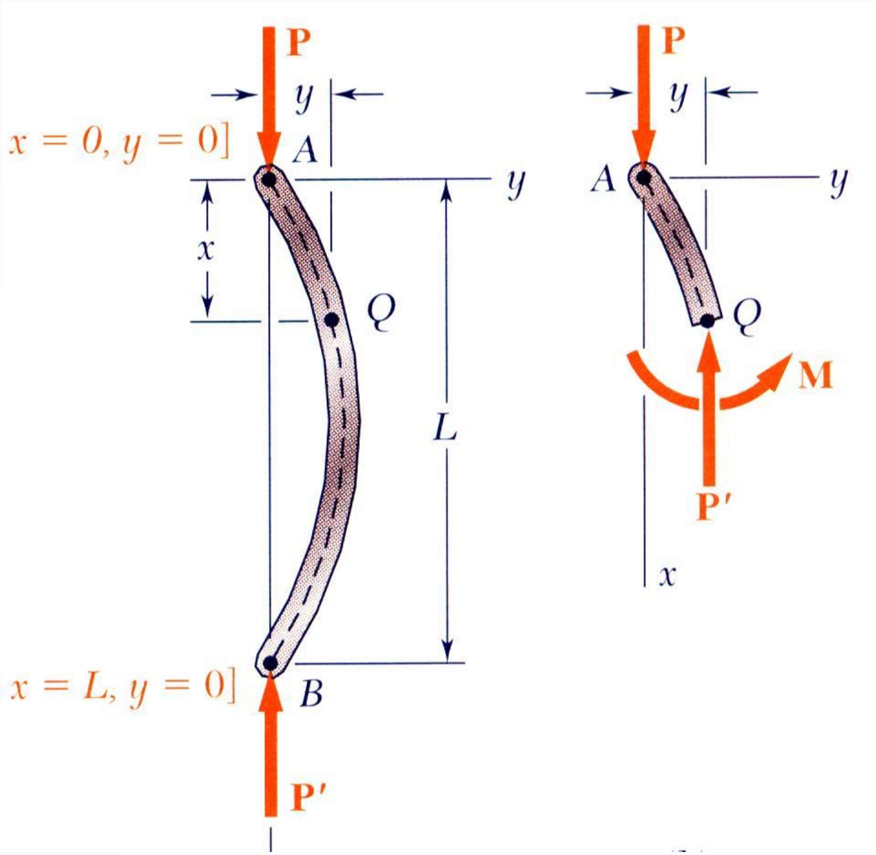
Se $sen\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$ temos:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}L = n\pi \Rightarrow P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}\ , n = 1,2,\ldots$$

Para cada *n* temos uma Carga que anula a Condição 2, logo para cada *n* temos uma carga crítica.
Para n=1 temos o menor valor de P logo a Carga Crítica.

Carga Crítica $\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$

Coluna entre dois apoios fixos



O modo de flambagem correspondente:

$$y(x) = C_1 \cdot sen\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

Formula de Euler - Colunas

Índice de Esbeltez

$$\left.\begin{aligned} P_{cr} &= \frac{\pi^2 EI}{L^2} \\ \sigma_{cr} &= \frac{P_{cr}}{A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \sigma_{cr} &= \frac{\pi^2 EI}{AL^2} \\ &\boxed{i = \sqrt{\frac{I}{A}}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{L^2} i^2 = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{i}\right)^2}$$

σ_{cr} – Tensão Crítica *(Critical Stress)*

i – Raio de giração da secção

$$\boxed{\lambda = \frac{L}{i}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}$$

Tensão Crítica
Formula de Euler

λ – Índice de Esbeltez – medida da flexibilidade da coluna *(Slenderness Ratio)*

Formula de Euler - Colunas

Tensão Crítica vs. Índice de esbeltez

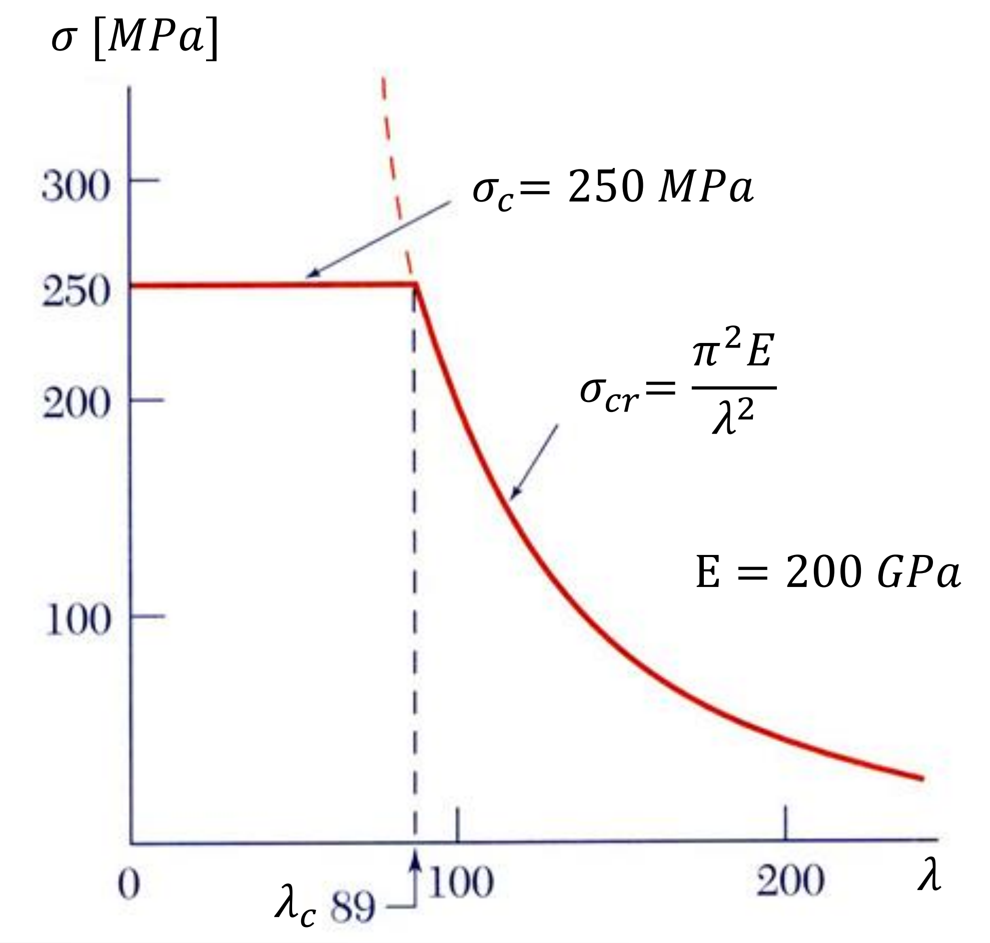
$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Quando a Tensão Crítica for igual a tensão de cedência do material encontramos o Índice Esbeltez limite. Ou seja;

$$\sigma_{cr} = \sigma_c \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda_c = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_c}}}$$

Esbeltez limite

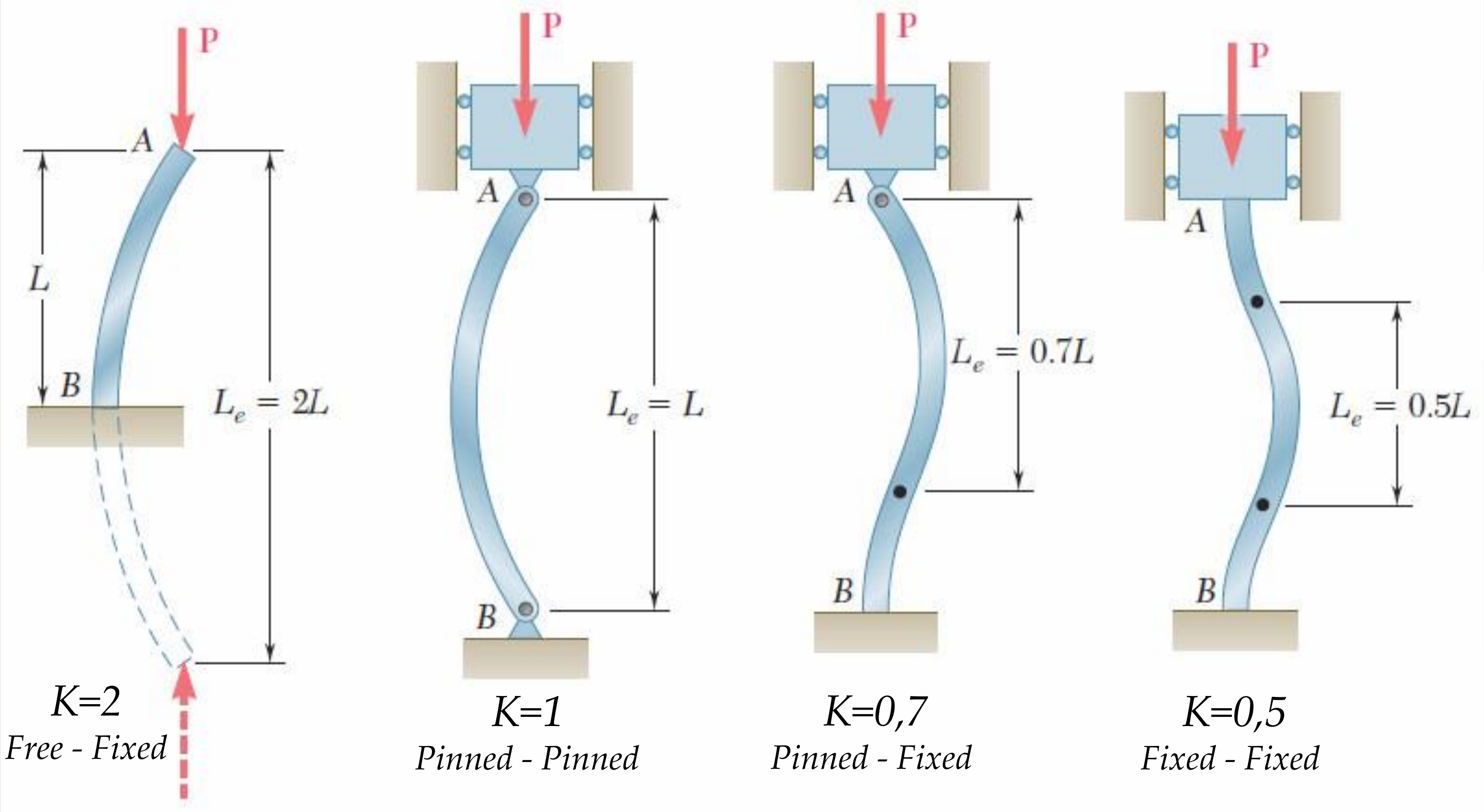


Formula de Euler - Colunas com vários tipos de apoios

A tensão crítica é alterada se os apoios da coluna mudarem.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_e^2} \qquad \lambda_e = \frac{L_e}{i} \qquad L_e = \mathrm{K} \cdot \mathrm{L}$$

K - Fator do comprimento efetivo
L_e - Comprimento efetivo
λ_e - Índice de esbeltez efetivo

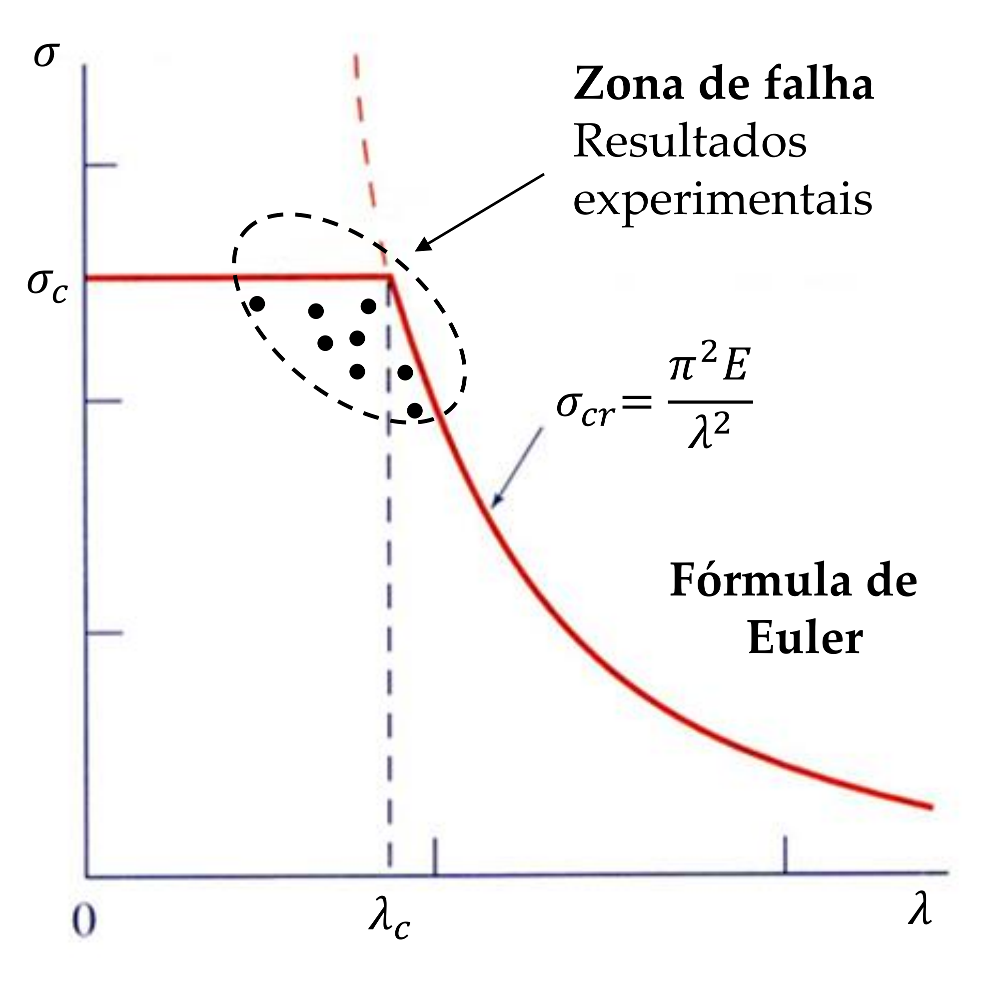


Fórmula de Euler – Limite

Limite da Fórmula de Euler

Na prática nas colunas com um índice de esbeltez baixo verifica-se experimentalmente falhas abaixo da tensão de cedência e abaixo da curva de Euler.

A lei empírica mais utilizada para resolver este problema é a parábola de Johnson.

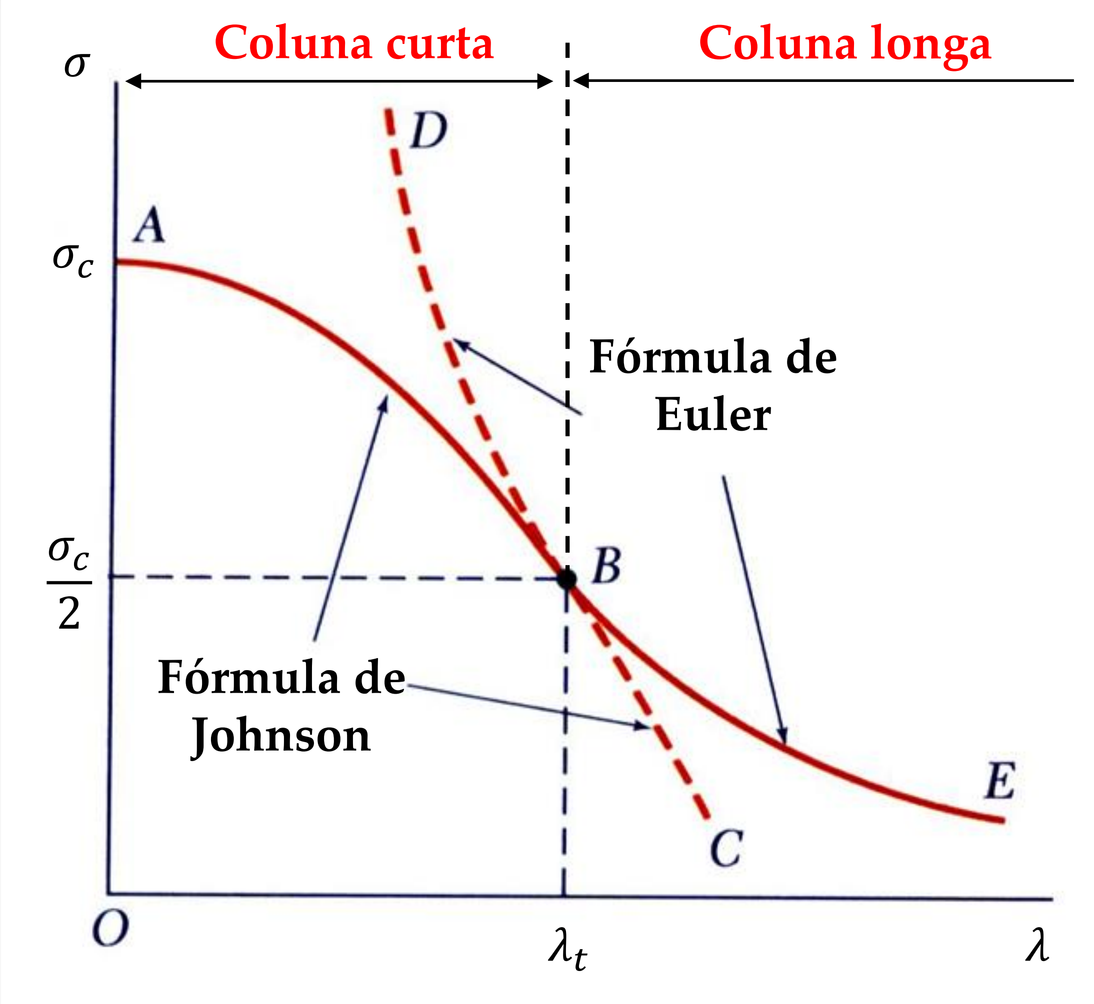


Fórmula de Johnson e Fórmula de Euler

A parábola de Johnson tem tangente nula no ponto A de abcissa nula, $(\lambda = 0, \sigma_{cr} = \sigma_c)$
E é tangente à expressão de Euler no ponto B.
$(\lambda = \lambda_t, \sigma_{cr} = \frac{\sigma_c}{2})$

λ_t - Índice de esbeltez de transição

$$\boxed{\lambda_t = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_c}}}$$



Tensão Crítica de Johnson
Coluna curta

$$\boxed{\sigma_{cr} = \sigma_c - \frac{\sigma_c^2}{4\pi^2 E}\lambda_e^2}$$

Tensão Crítica de Euler
Coluna longa

$$\boxed{\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_e^2}}$$

Metodologia de calculo da Carga Crítica

Dados do problema: $\sigma_c, E, A, L,$ geometria da secção e os dois tipos de apoios.

1- Calcular a área da secção, A.

2- Calcular os dois momentos de inercia da secção, escolher o mais pequeno, I.

3- Calcular o raio de giração da secção, $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

4- Calcular o comprimento efetivo, L_e

5- Calcular o índice de esbeltez, $\lambda_e = \frac{L_e}{i}$

6- Calcular o índice de esbeltez de transição, $\lambda_t = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_c}}$

7- Se $\lambda_e > \lambda_t$ utilizar Tensão Crítica de Euler, $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_e^2}$

8- Se $\lambda_e < \lambda_t$ utilizar Tensão Crítica de Johnson, $\sigma_{cr} = \sigma_c - \frac{\sigma_c^2}{4\pi^2 E}\lambda_e^2$

9- Calculo da Carga Crítica, $P_{cr} = A\sigma_{cr}$