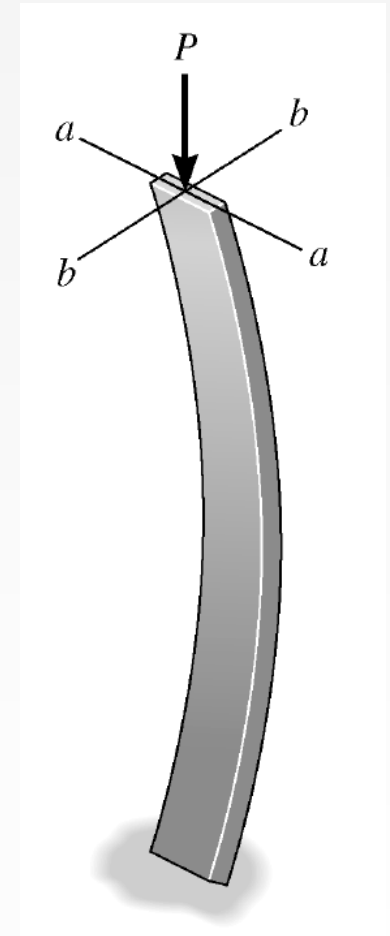
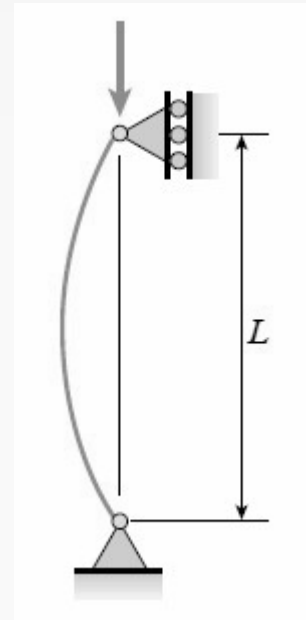


Fundamentos de Mecânica dos Materiais

Capítulo 6

- Estabilidade de estruturas



Acetatos e imagens baseados nos livros:

- Mechanics of Materials - Beer & Jonhson
- Mecânica e Resistência dos Materiais – V. Dias da Silva
- Resistência dos Materiais, R.C. Hibbeler



- Noção de instabilidade axial - Flambagem
- Fórmula de Euler
- Fórmula de Euler com vários tipos de apoios
- Fórmula de Johnson
- Projeto de colunas



Noção de instabilidade axial - Flambagem

Capítulo 6

Resistência dos Materiais

Exemplos

- Coloque uma régua de pé sobre uma mesa e exerça uma força vertical no topo da régua. A medida que aumenta a força a régua vai iniciar um processo de flexão encurvando a régua. Se continuar a aumentar a força a régua irá quebrar pois o plástico é um material frágil.
- Se colocar um pé sobre uma lata de 33cl vai reparar que ela será amaçada logo a partir de uma determinada força.





Noção de instabilidade axial - Flambagem

Capítulo 6

Resistência dos Materiais

Colunas: Elementos estruturais compridos e esbeltos sujeitos a uma força axial de compressão.

Flambagem: Deflexão lateral que as colunas sofrem. Em geral a flambagem leva a uma falha repentina e dramática da estrutura.

Carga Crítica (P_{cr}): É a carga axial máxima que uma coluna pode suportar antes de ocorrer a flambagem.

Qualquer carga adicional provocará flambagem na coluna.





Formula de Euler - Colunas

Determinação da Carga Crítica

Ao assumir uma carga de compressão significativa, a coluna vai fletir.

A equação diferencial do deslocamento y devido à flexão é dada por:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

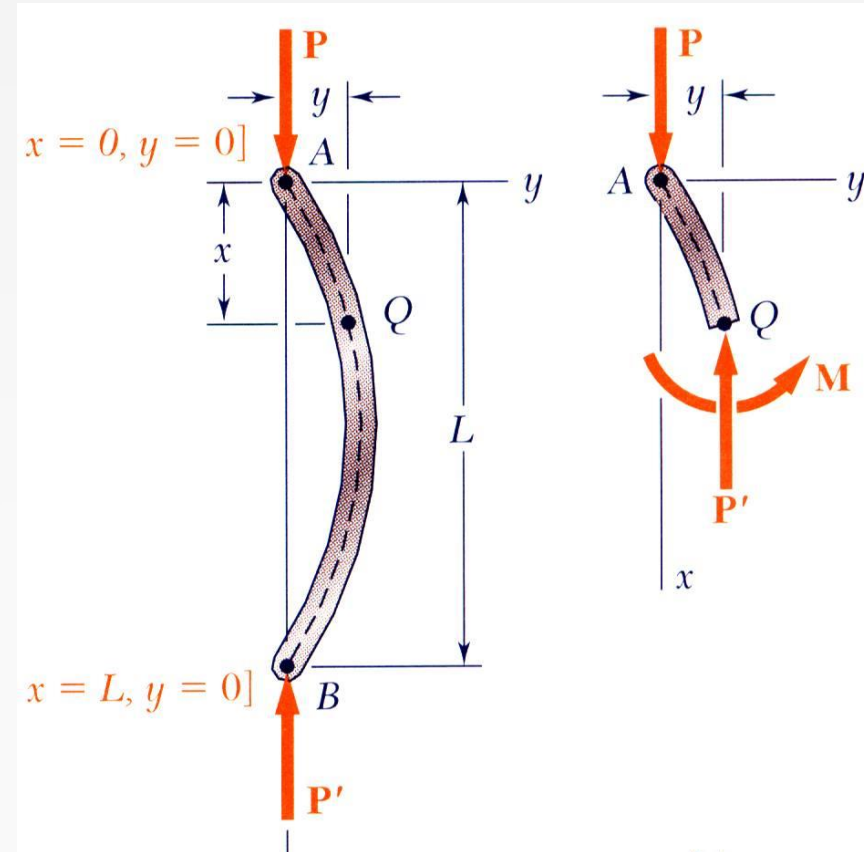
Em qualquer secção o momento fletor M é descrito por:

$$M = -P \cdot y$$

Assim temos:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI}\right) y = 0$$

Coluna entre dois apoios fixos



I – Menor momento de inercia da secção

E – Módulo de Elasticidade do material



Formula de Euler - Colunas

Determinação da Carga Crítica

Esta equação diferencial tem a seguinte solução:

$$y = C_1 \cdot \text{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + C_2 \cdot \text{cos} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right)$$

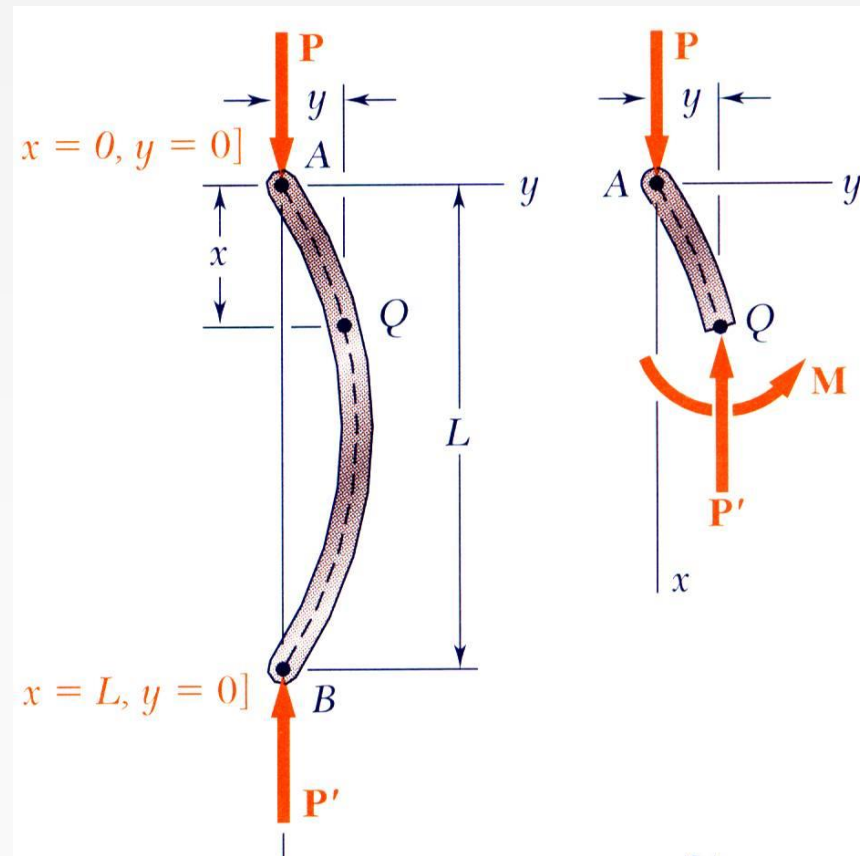
Esta equação do deslocamento depende de duas constantes C_1 e C_2 que podem ser determinadas com duas condições de fronteira:

$$y(0) = 0 \text{ e } y(L) = 0$$

Com $y(0) = 0$ temos:

$$y = C_1 \cdot \cancel{\text{sen}(0)} + C_2 \cdot \cancel{\text{cos}(0)} = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow y = C_1 \cdot \text{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right)$$

Coluna entre dois apoios fixos





Formula de Euler - Colunas

Determinação da Carga Crítica

$$y = C_1 \cdot \text{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right)$$

Com $y(L) = 0$ temos:

$$C_1 \cdot \text{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0$$

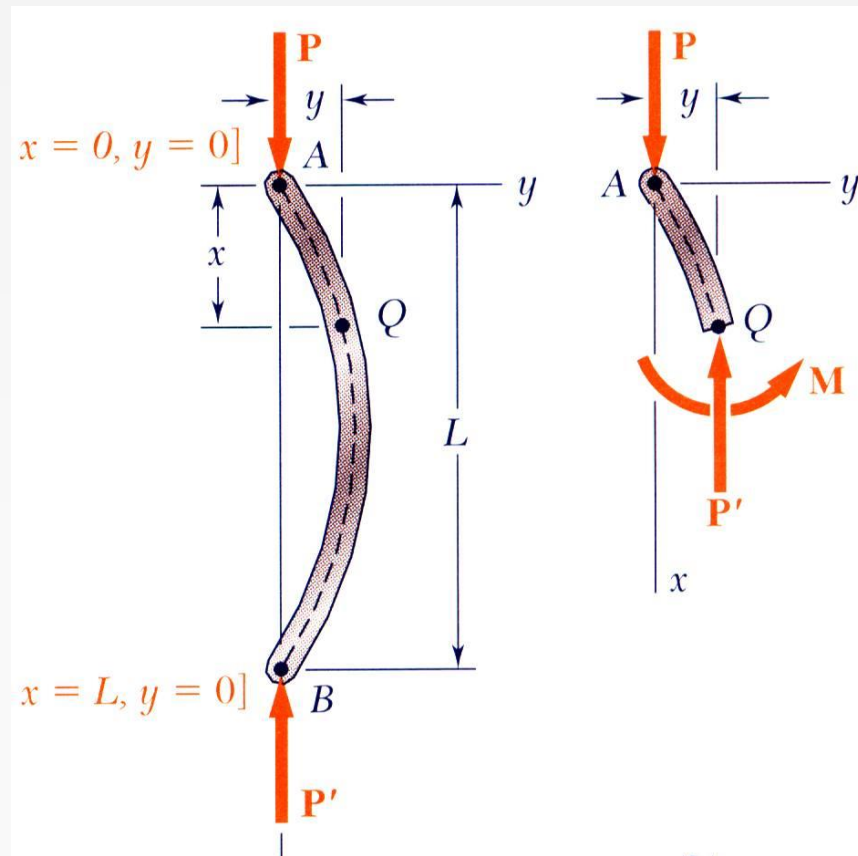
Temos um produto entre dois valores logo temos duas condições, ou:

Condição 1: $C_1 = 0$ ou

Condição 2: $\text{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0$

Condição 1 - Se $C_1 = 0$ temos $y = 0$, ou seja, a coluna mantém-se vertical. Quando isto acontecer a Carga não será suficiente para criar instabilidade.

Coluna entre dois apoios fixos





Formula de Euler - Colunas

Determinação da Carga Crítica

Condição 2

Se $\text{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0$ temos:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = n\pi \Rightarrow P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}, n = 1, 2, \dots$$

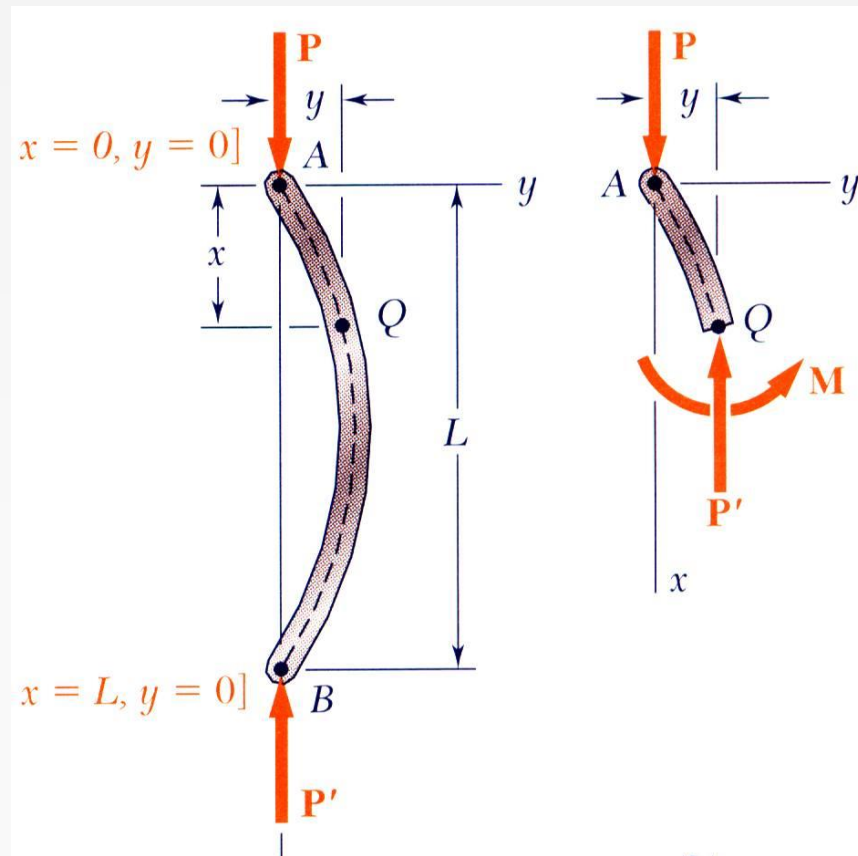
Para cada n temos uma Carga que anula a Condição 2, logo para cada n temos uma carga crítica.

Para $n=1$ temos o menor valor de P logo a Carga Crítica.

Carga Crítica

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Coluna entre dois apoios fixos



O modo de flambagem correspondente:

$$y(x) = C_1 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right)$$



Índice de Esbeltez

$$\left. \begin{aligned} P_{cr} &= \frac{\pi^2 EI}{L^2} \\ \sigma_{cr} &= \frac{P_{cr}}{A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sigma_{cr} &= \frac{\pi^2 EI}{AL^2} \\ i &= \sqrt{\frac{I}{A}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{L^2} i^2 = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{i}\right)^2}$$

σ_{cr} – Tensão Crítica (*Critical Stress*)

i – Raio de giração da secção

$$\lambda = \frac{L}{i}$$

\Rightarrow

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Tensão Crítica
Formula de Euler

λ – Índice de Esbeltez – medida da flexibilidade da coluna
(*Slenderness Ratio*)



Formula de Euler - Colunas

Tensão Crítica vs. Índice de esbeltez

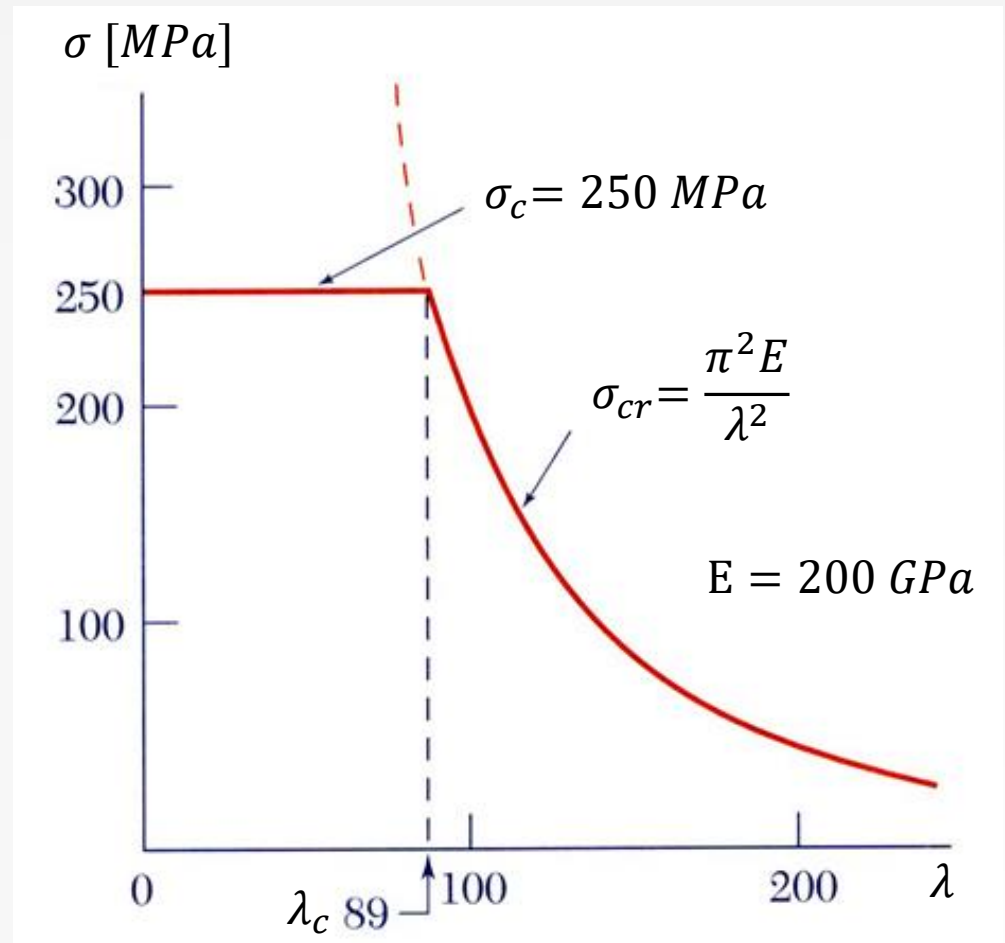
$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Quando a Tensão Crítica for igual a tensão de cedência do material encontramos o Índice Esbeltez limite. Ou seja;

$$\sigma_{cr} = \sigma_c \Rightarrow$$

$$\lambda_c = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_c}}$$

Esbeltez limite





Formula de Euler - Colunas com vários tipos de apoios

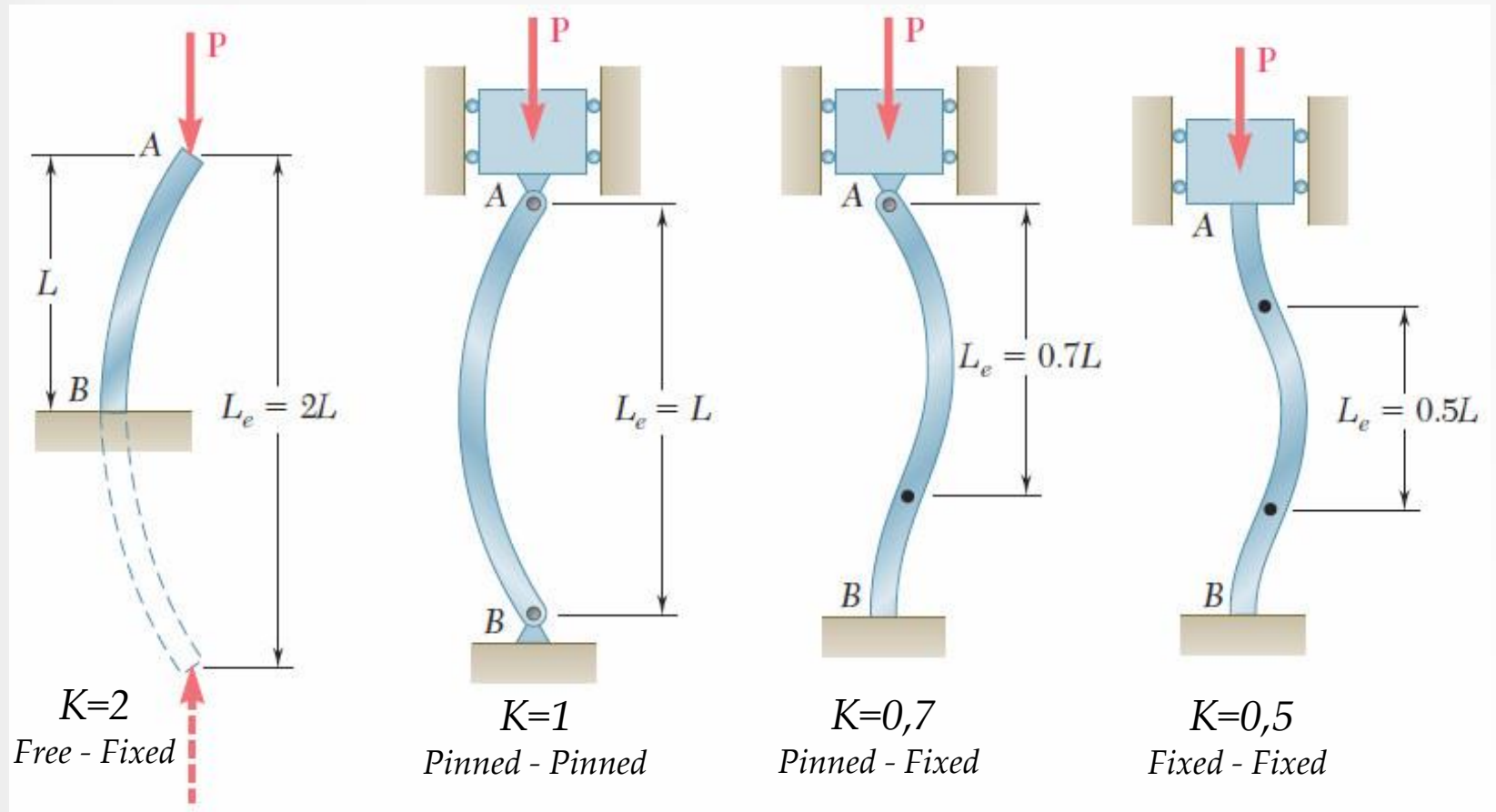
A tensão crítica é alterada se os apoios da coluna mudarem.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_e^2} \quad \lambda_e = \frac{L_e}{i} \quad L_e = K \cdot L$$

K - Fator do comprimento efetivo

L_e - Comprimento efetivo

λ_e - Índice de esbeltez efetivo





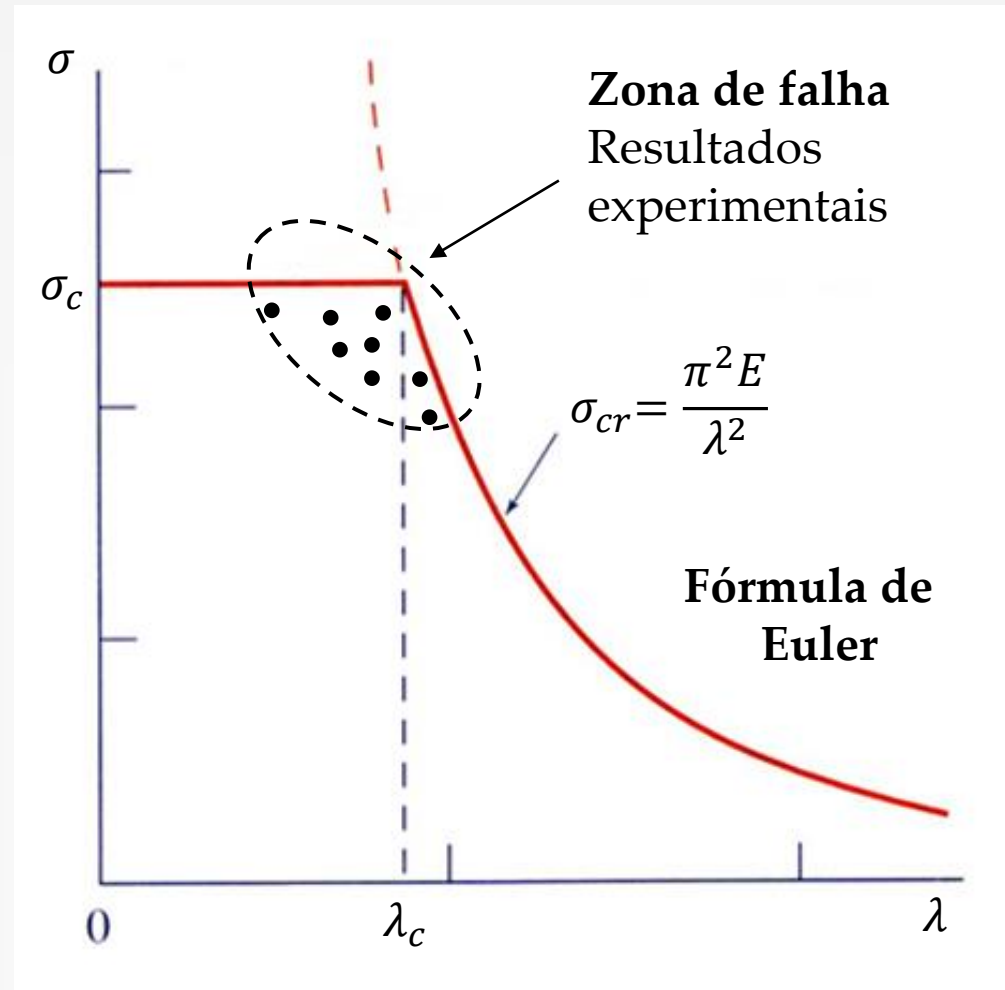
Fórmula de Euler – Limite

Capítulo 6

Limite da Fórmula de Euler

Na prática nas colunas com um índice de esbeltez baixo verifica-se experimentalmente falhas abaixo da tensão de cedência e abaixo da curva de Euler.

A lei empírica mais utilizada para resolver este problema é a parábola de Johnson.





Fórmula de Johnson e Fórmula de Euler

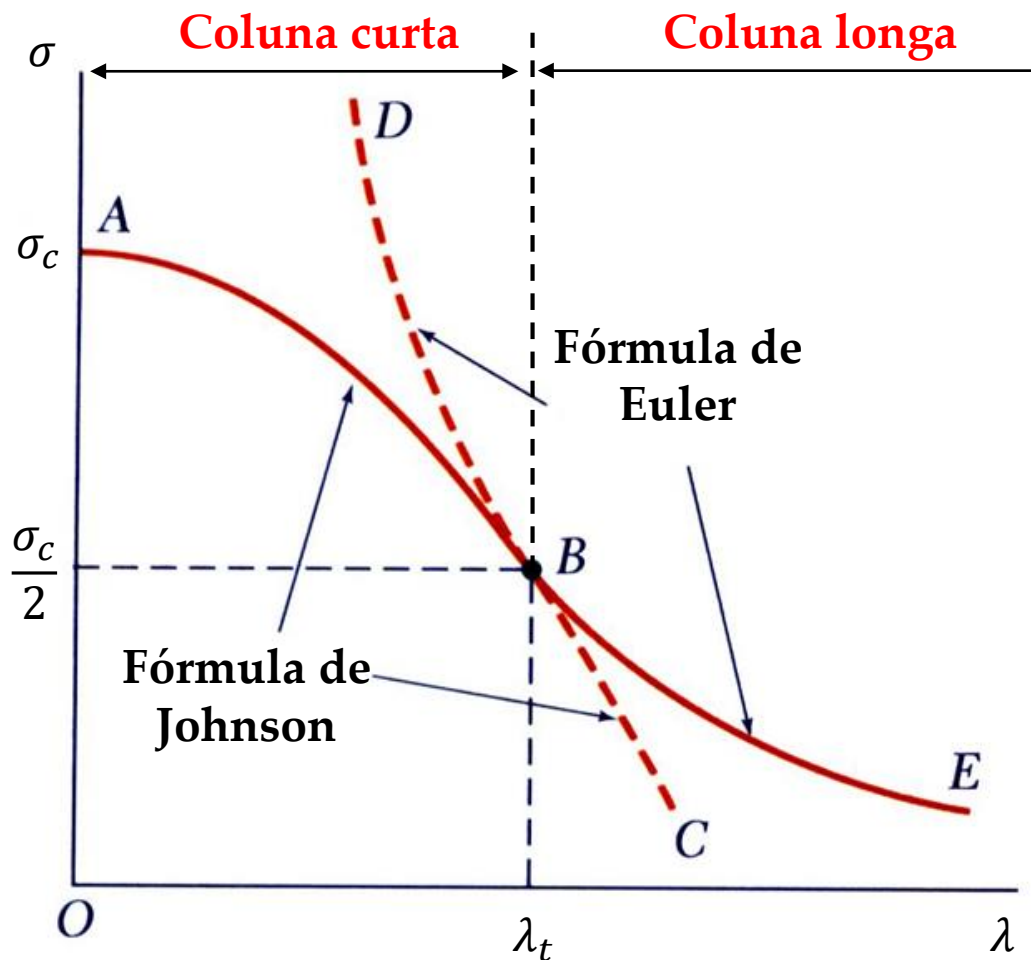
A parábola de Johnson tem tangente nula no ponto A de abcissa nula, $(\lambda = 0, \sigma_{cr} = \sigma_c)$
 E é tangente à expressão de Euler no ponto B.
 $(\lambda = \lambda_t, \sigma_{cr} = \frac{\sigma_c}{2})$

λ_t - Índice de esbeltez de transição

$$\lambda_t = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_c}}$$

Tensão Crítica de Johnson
Coluna curta

$$\sigma_{cr} = \sigma_c - \frac{\sigma_c^2}{4\pi^2 E} \lambda_e^2$$



Tensão Crítica de Euler
Coluna longa

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_e^2}$$



Metodologia de calculo da Carga Crítica

Capítulo 6

Dados do problema: σ_c , E , A , L , geometria da secção e os dois tipos de apoios.

1- Calcular a área da secção, A .

2- Calcular os dois momentos de inercia da secção, escolher o mais pequeno, I .

3- Calcular o raio de giração da secção, $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

4- Calcular o comprimento efetivo, L_e

5- Calcular o índice de esbeltez, $\lambda_e = \frac{L_e}{i}$

6- Calcular o índice de esbeltez de transição, $\lambda_t = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_c}}$

7- Se $\lambda_e > \lambda_t$ utilizar Tensão Crítica de Euler, $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_e^2}$

8- Se $\lambda_e < \lambda_t$ utilizar Tensão Crítica de Johnson, $\sigma_{cr} = \sigma_c - \frac{\sigma_c^2}{4\pi^2 E} \lambda_e^2$

9- Calculo da Carga Crítica, $P_{cr} = A\sigma_{cr}$