

# Capítulo 1

## Barras em Tração e Compressão

### 1.1 Hipóteses Básicas

Barra é um elemento estrutural cuja principal característica geométrica é possuir o comprimento bem maior que as dimensões da seção transversal. Assim, considera-se uma barra como um elemento unidimensional, analisando-se o seu comportamento ao longo da direção paralela à dimensão longitudinal, ou seja, o eixo  $x$  do sistema de referência mostrado na Figura 1.1.

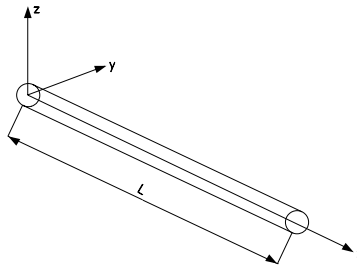


Figura 1.1: Barra de comprimento  $L$  juntamente com sistema de coordenadas.

A cinemática do modelo de barra consiste de ações de movimento axiais, ou seja, as seções transversais permanecem perpendiculares ao eixo da barra como ilustrado na Figura 1.2. Desta forma, no caso de deformação tem-se apenas ações de estiramento e encurtamento da barra. As ações de movimento rígido correspondem à translações na direção do eixo  $x$ . Os esforços internos e externos compatíveis com a cinemática adotada são forças axiais.

Nas seções seguintes, assume-se o caso de pequenas deformações e material elástico linear.

### 1.2 Forma Forte

Considere a barra da Figura 1.3 submetida a ação de uma carga axial distribuída de intensidade variável  $p(x)$ . Seja o elemento de comprimento  $\Delta x$  obtido por cortes em duas seções perpendiculares A e B ao eixo da barra. Na Figura 1.3, tem-se um diagrama de corpo livre deste elemento com a carga distribuída e as forças normais nas seções A e B. Como a força normal pode variar entre A e B, indica-se a mesma como  $N_x + \Delta N_x$  em B.

Fazendo o equilíbrio do elemento de barra na direção  $x$  tem-se que

$$\sum F_x = 0 : -N_x + N_x + \Delta N_x + p(x)\Delta x = 0 \rightarrow \frac{\Delta N_x}{\Delta x} = -p(x). \quad (1.1)$$

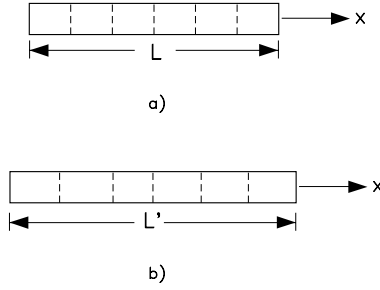


Figura 1.2: Cinemática do modelo de barra: seções transversais permanecem perpendiculares ao eixo da barra.

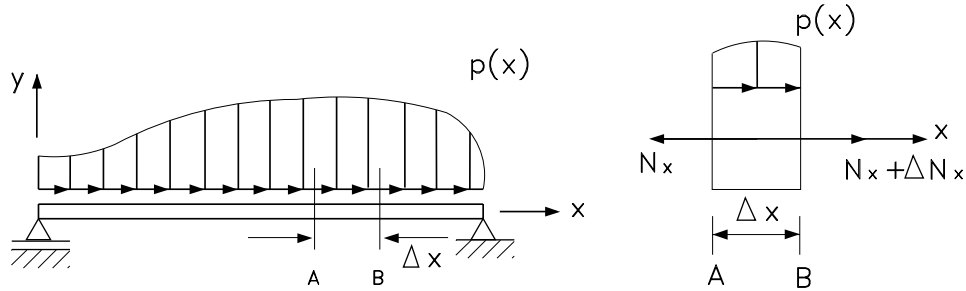


Figura 1.3: Barra submetida a uma força axial variável.

Tomando-se o limite para  $\Delta x \rightarrow 0$ , ou seja  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta N_x}{\Delta x}$ , obtém-se a equação diferencial da barra em termos da força normal  $N_x$  para o caso de pequenas deformações, isto é

$$\frac{dN_x}{dx} = -p(x). \quad (1.2)$$

Integrando-se a equação anterior vem que

$$N_x(x) = - \int_0^x p(x) dx + C_1,$$

sendo  $x$  uma seção arbitrária e  $C_1$  uma constante de integração arbitrária determinada a partir das condições de contorno. Assim, a partir da integração da equação diferencial, obtém-se uma função  $N_x(x)$  descrevendo o comportamento da força normal ao longo de toda a barra.

A força normal  $N_x(x)$  numa seção transversal  $x$  é dada de forma geral como uma integral ao longo da área  $A$  da barra [?]

$$N_x(x) = \int_A \sigma_{xx}(x) dydz = \sigma_{xx}(x) \int_A dydz = \sigma_{xx}(x)A(x), \quad (1.3)$$

sendo  $\sigma_{xx}$  a componente de tensão normal na direção do eixo  $x$ . Logo, devido a cinemática adotada no modelo de barra, tem-se um estado uniaxial de tensão dado pela tensão normal  $\sigma_{xx}$ , a qual é constante para todos os pontos de uma seção transversal.

Para material elástico linear isotrópico, a lei de Hooke no caso de barra em tração e compressão se reduz a

$$\sigma_{xx} = E\epsilon = E(\epsilon_{xx} - \epsilon_0), \quad (1.4)$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx}, \quad (1.5)$$

sendo  $\epsilon_{xx}$  a componente de deformação normal;  $\epsilon_{yy}$  e  $\epsilon_{zz}$  as componentes de deformação transversais nas direções  $y$  e  $z$ ;  $E$  e  $\nu$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson do material;  $\epsilon_0$  representa a deformação inicial da barra existente em casos onde se tem um gradiente de temperatura ou quando a barra é montada com interferência.

Substituindo (1.4) em (1.3), tem-se a expressão da força normal em termos da deformação  $\epsilon$ , ou seja

$$N_x(x) = E(x)A(x)(\epsilon_{xx} - \epsilon_0). \quad (1.6)$$

A componente de deformação normal  $\epsilon_{xx}$  é dada em função do deslocamento axial da barra  $u = u(x)$  como [?]

$$\epsilon_{xx} = \frac{du}{dx}. \quad (1.7)$$

A partir de (1.6) e de (1.7) vem que

$$N_x(x) = E(x)A(x) \left[ \frac{du}{dx} - \epsilon_0 \right]. \quad (1.8)$$

Supondo  $\epsilon_0 = 0$  para efeitos de simplificação e substituindo relação anterior em (1.2), tem-se a forma forte do problema ou equação diferencial de barra em termos do deslocamento axial  $u = u(x)$

$$\frac{d}{dx} \left( E(x)A(x) \frac{du}{dx} \right) + p(x) = 0, \quad \text{para } x \in (0, L). \quad (1.9)$$

Para o caso onde o módulo de elasticidade e a área da seção são constantes ( $E(x) = E$  e  $A(x) = A$ ), obtém-se

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} + p(x) = 0, \quad \text{em } x \in (0, L). \quad (1.10)$$

Observa-se que as condições de contorno são em termos das vinculações e forças normais presentes nas extremidades da barra. As condições de contorno em termos de deslocamento são denominadas cinemáticas, geométricas, essenciais ou principais. Já as condições de contorno em termos da força normal são denominadas naturais ou de força. A Figura 1.4 ilustra as condições de contorno essenciais para uma barra. Por sua vez, as condições de contorno naturais são mostradas na Figura 1.5, devendo-se observar que  $N_x(x=0) = -P_0$  e  $N_x(x=L) = P_L$ , sendo  $P_0$  e  $P_L$ , respectivamente, as forças axiais aplicadas nas extremidades  $x=0$  e  $x=L$ .

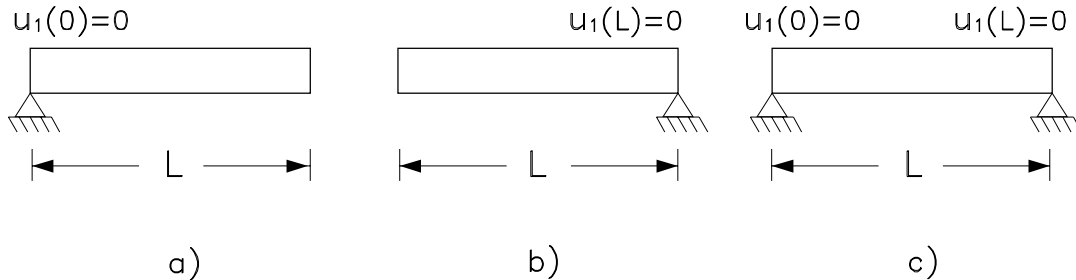


Figura 1.4: Condições de contorno em termos de deslocamento axial.

Resolver (1.9) ou (1.10) significa determinar a função  $u(x)$  satisfazendo a equação diferencial e as condições de contorno, ou seja o Problema de Valor de Contorno (PVC) da barra. Observa-se que como a equação diferencial de barra é de segunda ordem, a solução  $u(x)$  deve possuir derivadas contínuas até a segunda ordem, ou seja, pertence ao conjunto  $C^2(0, L)$ .

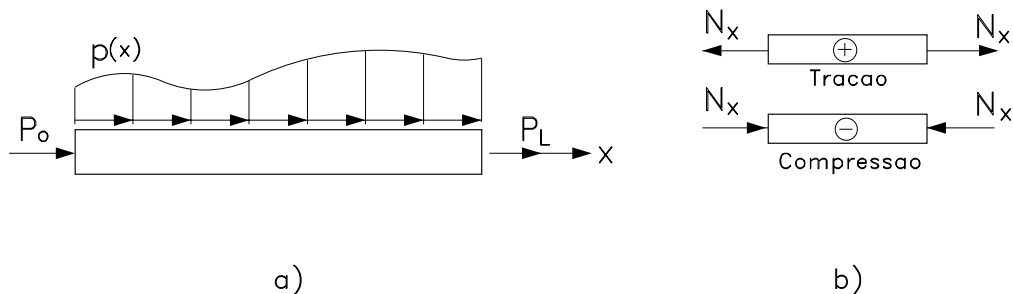


Figura 1.5: Condições de contorno em termos da força normal.

As equações diferenciais do tipo (1.9) e (1.10) podem ser escritas na seguinte forma padrão

$$Au = f$$

sendo  $A$  um operador diferencial linear. No caso de barra,  $A = -\frac{d}{dx} \left( E(x)A(x) \frac{d}{dx} \right)$ ,  $u = u(x)$  e  $f = p(x)$ . Para considerar as condições de contorno, define-se o domínio  $D_A$  do operador como o conjunto de funções com derivadas contínuas suficientes para que a aplicação do operador tenha sentido e satisfazendo as condições de contorno. Por exemplo, no caso do problema de barra, o domínio  $D_A$  é definido como o conjunto de funções  $v = v(x)$  com derivadas segunda contínuas e satisfazendo as condições de contorno, ou seja, as funções  $v$  pertencem ao conjunto  $C^2(0, L)$ . Assim, o domínio  $D_A$  é denotado como

$$D_A = \left\{ v \mid v \in C^2(0, L), v \text{ satisfaz as condições de contorno} \right\}.$$

Como as funções  $v \in C^2(0, L)$  possuem derivada segunda contínua, diz-se que as mesmas possuem regularidade 2. Observa-se que a solução do PVC é uma função pertencente ao domínio do operador.

O exemplo a seguir ilustra a resolução de um problema de barra através da integração da equação diferencial (1.10). Em geral, estes problemas podem ser resolvidos aplicando a seguinte sequência de passos:

1. escrever a equação de carregamento,
2. indicar as condições de contorno,
3. integrar a equação diferencial,
4. determinar as constantes de integração,
5. escrever as equações finais,
6. traçar os diagramas,
7. calcular as reações de apoio.

**Exemplo 1.1** Traçar os diagramas da força normal e deslocamento axial para a barra ilustrada na Figura 1.6, através da integração da equação diferencial. Assumir  $EA = 1$ .

Para resolver este exemplo, adota-se os passos indicados anteriormente.

1. Equação do carregamento:  $p(x) = -p_0$
2. Condições de contorno:  $u(x = 0) = 0$  e  $N_x(x = L) = 0$

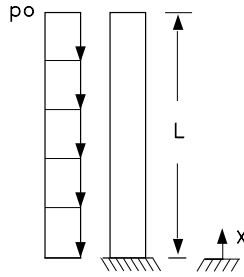


Figura 1.6: Barra submetida a uma carga distribuída constante.

3. *Integração da equação diferencial:*

Como  $EA = 1$ , a equação diferencial se reduz a  $\frac{d^2u}{dx^2} = p_0$ .

- primeira integração: força normal

$$N_x(x) = \frac{du}{dx} = p_0 \rightarrow N_x = p_0x + C_1$$

- segunda integração: deslocamento axial

$$u(x) = \frac{p_0}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

4. *Determinação das constantes de integração*

$$u(x=0) = \frac{p_0}{2}(0)^2 + C_1(0) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$N_x(x=L) = p_0L + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = -p_0L$$

5. *Equações finais*

- força normal:  $N_x = p_0(x - L)$
- deslocamento:  $u(x) = \frac{p_0}{2} (x^2 - 2Lx)$

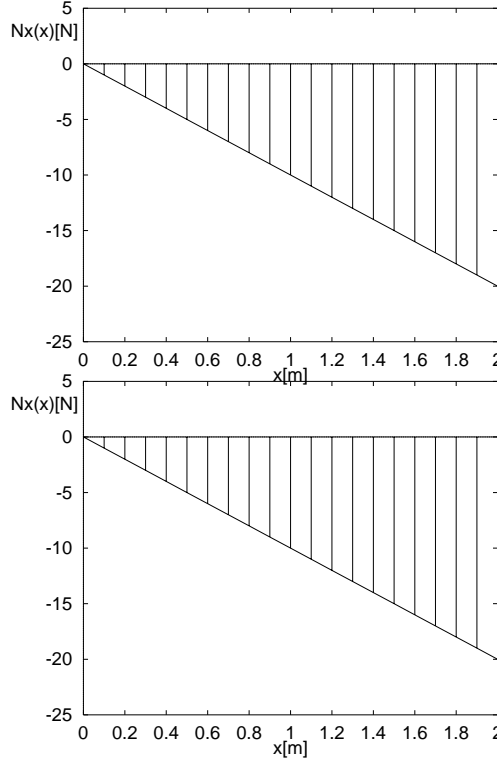
6. *Diagramas*

Os diagramas correspondentes às equações finais são ilustrados a seguir. Observa-se que  $N_x(x=0) = -p_0L$ ,  $N_x(x=L) = 0$ ,  $u(x=0) = 0$  e  $u(x=L) = -\frac{p_0}{2}L$ .

7. *Reação de apoio*

Neste caso, tem-se a reação de apoio normal  $R_x$  em  $x=0$  obtida pela condição de contorno indicada na Figura 1.5 como  $R_x = -N_x(x=0) = p_0L$ . Observa-se que a barra está sob

compressão como esperado devido ao carregamento empregado.



Observa-se que a força normal varia linearmente, enquanto o deslocamento tem um comportamento quadrático.

### 1.3 Forma Fraca

Multiplicando-se a equação (1.9) por uma função  $v = v(x)$  pertencente ao domínio  $D_A$ , ou seja  $v$  é suficientemente regular e satisfaz as condições de contorno, e integrando-se ao longo do comprimento  $L$  da barra, vem que

$$\int_0^L \left[ -\frac{d}{dx} \left( E(x)A(x) \frac{du}{dx} \right) - p(x) \right] v dx = 0. \quad (1.11)$$

Integrando a expressão anterior por partes, chega-se a forma fraca ou variacional da equação diferencial (1.9), ou seja,

$$\int_0^L \left[ -\frac{d}{dx} \left( E(x)A(x) \frac{du}{dx} \right) - p(x) \right] v dx = \int_0^L \left[ E(x)A(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} - p(x)v \right] dx - E(x)A(x) \frac{du}{dx} v \Big|_0^L = 0.$$

Empregando a relação (1.8) com  $\epsilon_0 = 0$  vem que

$$\int_0^L E(x)A(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - \int_0^L p(x)v dx - [N_x(L)v(L) - N_x(0)v(0)] = 0, \quad (1.12)$$

sendo  $N_x(0)$  e  $N_x(L)$  as condições de contorno naturais do problema, ou seja, os valores das forças normais prescritas em  $x = 0$  e  $x = L$ . Analogamente,  $v(0)$  e  $v(L)$  são as condições de contorno essenciais em termos dos deslocamentos axiais prescritos em  $x = 0$  e  $x = L$ .

Para o caso em que o módulo de elasticidade e a área da seção são constantes ( $E(x) = E$  e  $A(x) = A$ ) e a barra está simplesmente apoiada ( $v(0) = v(L) = 0$ ), obtém-se a partir de (1.12)

$$\int_0^L EA \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^L p(x)v dx. \quad (1.13)$$

Observa-se que a denominação forma fraca para (1.12) e (1.13) vem do fato que as diferenciações de ordem 1 envolvidas são inferiores a derivada segunda presente na forma forte (1.9). Desta maneira, as funções  $u$  e  $v$  satisfazendo (1.13) não precisam ser tão regulares, ou seja, basta que pertençam ao conjunto das funções contínuas  $C(0, L)$  ou contínuas por partes  $C_{cp}(0, L)$ . Lembre-se que no caso da forma forte (1.9), as funções devem ser tomadas em  $C^2(0, L)$ .

**Exemplo 1.2** *Obter a forma fraca do problema dado no exemplo anterior.*

*O problema de valor de contorno associado ao exemplo anterior é descrito como: encontrar a função  $u = u(x)$  satisfazendo a equação diferencial*

$$\frac{d^2u}{dx^2} = p_0,$$

e as condições de contorno  $u(x = 0) = 0$  e  $N_x(x = L) = \frac{du}{dx} = 0$ . Lembre-se que  $EA = 1$ . O operador e o termo do lado direito são dados, respectivamente, por  $A = \frac{d^2}{dx^2}$  e  $f = p_0$ . Por sua vez, o domínio do operador é denotado como  $D_A = \left\{ v \mid v \in C^2(0, L), v(0) = 0 \text{ e } \frac{dv(L)}{dx} = 0 \right\}$ . A partir daí, basta multiplicar a expressão anterior por uma função  $v = v(x)$  pertencente ao domínio  $D_A$  e integrar ao longo do comprimento da barra. Logo,

$$\int_0^L \left( \frac{d^2u}{dx^2} - p_0 \right) v dx = 0$$

Integrando por partes vem que

$$\int_0^L \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - \int_0^L p_0 v dx - [N_x(L)v(L) - N_x(0)v(0)] = 0,$$

e aplicando as condições de contorno  $v(x = 0) = 0$  e  $N_x(x = L) = \frac{dv(L)}{dx} = 0$ , obtém-se a forma fraca para este problema

$$\int_0^L \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^L p_0 v dx.$$

## 1.4 Aproximação

A solução aproximada  $u_n(x)$  para a solução exata  $u(x)$  de um problema de valor de contorno unidimensional tem a seguinte forma geral

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x), \quad (1.14)$$

sendo  $\{\phi_i\}_{i=1}^n$  um conjunto de  $n$  funções linearmente independentes denominadas funções de base, de forma ou de interpolação. Estas funções são escolhidas com ordem de diferenciação compatível com aquela presente na forma fraca. Além disso, satisfazem as condições de contorno essenciais, enquanto as condições de contorno naturais são automaticamente satisfeitas pela forma fraca do problema como será visto posteriormente.

Observa-se que a solução aproximada  $u_n$  é dada pela combinação linear das funções de interpolação  $\phi_i$ . O critério empregado para a determinação dos coeficientes  $a_i$  define os diferentes métodos variacionais, tais como Resíduos Ponderados (Colocação e Galerkin), Ritz e Mínimos Quadrados.

O conjunto de todas as combinações lineares das funções  $\phi_i$  forma um subespaço linear denotado, geralmente, por  $\text{span } \{\phi_i\}_{i=1}^n$ . Portanto, a aproximação  $u_n$  pertence ao subespaço gerado pelas funções  $\phi_i$ , ou seja,  $u_n \in \text{span } \{\phi_i\}_{i=1}^n$ . Como em geral a solução aproximada  $u_n$  não coincide com  $u$ , tem-se o resíduo  $r_n(x) = -\frac{d}{dx} \left( E(x)A(x)\frac{du_n(x)}{dx} \right) - p(x)$  associado a  $u_n$ . Observa-se que o resíduo  $r_n(x)$  é também uma função.

Através da formulação de Galerkin, requer-se que o resíduo  $r_n$  associado à aproximação  $u_n$  seja ortogonal a todo elemento de  $\text{span } \{\phi_i\}_{i=1}^n$ , como será explicado em detalhes mais adiante. Assim, como no caso de vetores no sentido algébrico, a condição de ortogonalidade entre duas funções  $g(x)$  e  $h(x)$  implica que o produto interno entre as mesmas deve ser nulo, o que é denotado por  $(g, h) = 0$ . Como está se trabalhando com funções, o produto interno é dado por uma integral como  $(g, h) = \int_a^b g(x)h(x)dx$ . Logo, para qualquer  $v_n \in \text{span } \{\phi_i\}_{i=1}^n$ , ou seja, para qualquer  $v_n$  dado por  $v_n(x) = \sum_{j=1}^n v_j \phi_j(x)$ , a condição de ortogonalidade do resíduo ao subespaço  $\text{span } \{\phi_i\}_{i=1}^n$  implica que

$$\begin{aligned} (r_n, v_n) &= \int_0^L \left[ -\frac{d}{dx} \left( E(x)A(x)\frac{du_n}{dx} \right) - p(x) \right] v_n dx \\ &= -\int_0^L \frac{d}{dx} \left( E(x)A(x)\frac{du_n}{dx} \right) v_n dx - \int_0^L p(x)v_n dx = 0. \end{aligned}$$

A primeira integral da expressão anterior pode ser integrada por partes conduzindo a

$$\begin{aligned} -\int_0^L \frac{d}{dx} \left( E(x)A(x)\frac{du_n}{dx} \right) v_n dx - \int_0^L p(x)v_n dx &= \int_0^L E(x)A(x)\frac{du_n}{dx} \frac{dv_n}{dx} dx - \int_0^L p(x)v_n dx \\ &\quad - E(x)A(x)\frac{du_n}{dx} v_n \Big|_0^L = 0, \end{aligned}$$

ou ainda empregando a relação (1.8)  $\epsilon_0 = 0$  vem que

$$\int_0^L E(x)A(x)\frac{du_n}{dx} \frac{dv_n}{dx} dx = \int_0^L p(x)v_n dx + [N_x(L)v_n(L) - N_x(0)v_n(0)]. \quad (1.15)$$

Observa-se que as expressões (1.15) e (1.15) obtidas pela formulação de resíduos ponderados são análogas, respectivamente, às equações (1.11) e (1.12). A diferença básica em (1.15) é requerer que o resíduo associado à aproximação  $u_n$  seja ortogonal ao subespaço de dimensão finita gerado por  $\text{span } \{\phi_i\}_{i=1}^n$ .

As funções  $u_n$  e  $v_n$  em (1.15) não precisam ser tão regulares. De fato, é suficiente que as mesmas sejam elementos de  $C_{cp}^1(0, L)$ , ou seja, funções contínuas com derivadas contínuas por partes. As condições de contorno essenciais devem também ser satisfeitas por  $u_n$  e  $v_n$ . Observa-se que como  $v_n \in \text{span } \{\phi_i\}_{i=1}^n$ , a condição de que o resíduo  $r_n$  seja ortogonal a  $v_n$  implica que o mesmo deva ser ortogonal a qualquer função  $\phi_i$ . Logo, impondo esta condição em (1.15) tem-se que

$$\int_0^L E(x)A(x)\frac{du_n}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx = \int_0^L p(x)\phi_i dx + [N_x(L)\phi_i(L) - N_x(0)\phi_i(0)], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.16)$$

A partir daí, substituindo (1.14) em (1.16) e supondo que a barra esteja simplesmente apoiada ( $v_n(0) = v_n(L) = 0$ ), vem que

$$\left\{ \sum_{j=1}^n \int_0^L E(x)A(x)\frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx \right\} a_j = \int_0^L p(x)\phi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.17)$$



## 1.5 Elemento de Barra

Como a deformação  $\varepsilon_{xx}$  dada em (1.7) e a forma fraca (1.17) contêm apenas a derivada primeira do campo de deslocamento  $u$ , as funções de interpolação  $\phi_i$  do elemento finito de barra precisa ser apenas contínua com derivada primeira contínua por partes, ou seja, tomam-se as funções  $\phi_i$  do conjunto  $C_{cp}^1(0, L)$ . O elemento mais simples é composto por dois nós e polinômios lineares. A Figura 1.7 ilustra uma barra dividida em 4 elementos através da introdução de 3 pontos internos. De forma geral, particionando a barra em  $N$  elementos, tem-se  $n = N - 1$  nós internos. Neste caso, as funções de interpolação  $\phi_i$  possuem a seguinte expressão geral

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}.$$

Observa-se que as funções  $\phi_i$  são diferentes de zero apenas no intervalo  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ . Este tipo de função é denominada função de suporte compacto, sendo o suporte dado pelo intervalo onde a função é não-nula, neste caso  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ . Este tipo de função permite criar a idéia de elemento finito como discutido a seguir. Na verdade o Método de Elementos Finitos é simplesmente uma forma padrão de construir funções de interpolação de suporte compacto. Estas funções são empregadas para a construir a solução aproximada (1.14). Os coeficientes  $a_i$  da combinação linear são determinados pelos Métodos Numéricos Variacionais tais como Resíduos Ponderados, Ritz e Mínimos Quadrados.

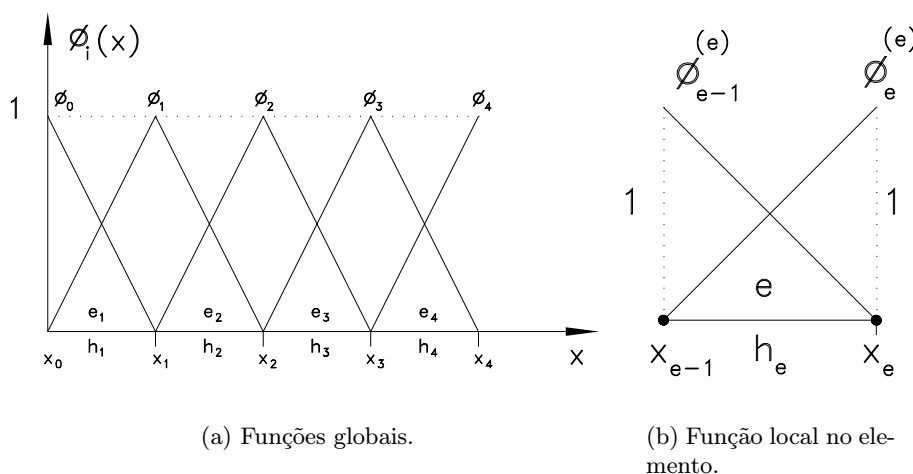


Figura 1.7: Malha de elementos e funções de interpolação.

A partir da Figura 1.7 e da expressão (1.14), tem-se que a restrição  $u_n^{(e)}$  da aproximação  $u_n$  no elemento genérico  $e$  é dada por

$$u_n^{(e)}(x) = a_1^{(e)} \phi_1^{(e)}(x) + a_2^{(e)} \phi_2^{(e)}(x), \quad (1.18)$$

Devido a forma das funções de interpolação locais  $\phi_i^{(e)}$ , os coeficientes  $a_i^{(e)}$  da combinação linear possuem um significado físico. No caso do problema de barra,  $a_1^{(e)}$  e  $a_2^{(e)}$  os valores dos deslocamentos axiais dos nós 1 e 2. Para verificar isto, basta tomar a expressão anterior, respectivamente, para  $x = x_1^{(e)}$  e  $x = x_2^{(e)}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} u_n^{(e)}(x_1^{(e)}) &= a_1^{(e)} \phi_1^{(e)}(x_1^{(e)}) + a_2^{(e)} \phi_2^{(e)}(x_1^{(e)}), \\ u_n^{(e)}(x_2^{(e)}) &= a_1^{(e)} \phi_1^{(e)}(x_2^{(e)}) + a_2^{(e)} \phi_2^{(e)}(x_2^{(e)}). \end{aligned}$$

Observando-se a Figura 1.7, tem-se que  $\phi_1^{(e)}(x_1^{(e)}) = \phi_2^{(e)}(x_2^{(e)}) = 1$  e  $\phi_1^{(e)}(x_2^{(e)}) = \phi_2^{(e)}(x_1^{(e)}) = 0$ . Logo, as expressões anteriores resultam

$$\begin{aligned} u_n^{(e)}(x_1^{(e)}) &= a_1^{(e)}, \\ u_n^{(e)}(x_2^{(e)}) &= a_2^{(e)}. \end{aligned}$$

De forma geral, ao se usar funções de interpolação como ilustradas na Figura 1.7, os coeficientes das combinações lineares em (1.14) e (1.18) indicam o valor da grandeza (no caso de barra o deslocamento axial) calculada nas respectivas coordenadas dos nós.

As funções de interpolação locais  $\phi_1^{(e)}$  e  $\phi_2^{(e)}$  possuem a seguinte forma geral

$$\phi_i^{(e)}(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [x_1^{(e)}, x_2^{(e)}] \\ -\frac{x - x_2^{(e)}}{h_e} & x \in [x_1^{(e)}, x_2^{(e)}] \\ \frac{x - x_1^{(e)}}{h_e} & x \in [x_1^{(e)}, x_2^{(e)}] \end{cases}, \quad (1.19)$$

sendo  $h_e = x_2^{(e)} - x_1^{(e)}$  o tamanho do elemento  $e$ .

A derivada de  $\phi_i^{(e)}(x)$  é dada por

$$\frac{d\phi_i^{(e)}}{dx} = \begin{cases} 0 & x \notin [x_1^{(e)}, x_2^{(e)}] \\ -\frac{1}{h_e} & x \in [x_1^{(e)}, x_2^{(e)}] \\ \frac{1}{h_e} & x \in [x_1^{(e)}, x_2^{(e)}] \end{cases}. \quad (1.20)$$

Desta forma, a expressão (1.17) possui a seguinte representação local no elemento  $e$

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n_e} \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} E(x)A(x) \frac{d\phi_j^{(e)}}{dx} \frac{d\phi_i^{(e)}}{dx} dx \right\} a_j^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} p(x) \phi_i^{(e)}(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_e, \quad (1.21)$$

sendo  $n_e$  o número de nós do elemento.

Tomando-se o elemento de barra com dois nós ( $n_e = 2$ ), tem-se as duas expressões seguintes para  $i = 1$  e  $i = 2$

$$\begin{aligned} \left( \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} E(x)A(x) \frac{d\phi_1^{(e)}}{dx} \frac{d\phi_1^{(e)}}{dx} dx \right) a_1^{(e)} + \left( \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} E(x)A(x) \frac{d\phi_1^{(e)}}{dx} \frac{d\phi_2^{(e)}}{dx} dx \right) a_2^{(e)} &= \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} p(x) \phi_1^{(e)}(x) dx, \\ \left( \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} E(x)A(x) \frac{d\phi_1^{(e)}}{dx} \frac{d\phi_2^{(e)}}{dx} dx \right) a_1^{(e)} + \left( \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} E(x)A(x) \frac{d\phi_2^{(e)}}{dx} \frac{d\phi_2^{(e)}}{dx} dx \right) a_2^{(e)} &= \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} p(x) \phi_2^{(e)}(x) dx, \end{aligned}$$

Lembrando que os coeficientes  $a_1^{(e)}$  e  $a_2^{(e)}$  representam, respectivamente, os deslocamentos axiais dos nós 1 e 2, ou seja,  $a_1^{(e)} = \bar{u}_1$  e  $a_2^{(e)} = \bar{u}_2$ , tem-se a seguinte forma matricial para a expressão anterior

$$\begin{bmatrix} \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} E(x)A(x) \frac{d\phi_1^{(e)}}{dx} \frac{d\phi_1^{(e)}}{dx} dx & \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} E(x)A(x) \frac{d\phi_1^{(e)}}{dx} \frac{d\phi_2^{(e)}}{dx} dx \\ \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} E(x)A(x) \frac{d\phi_2^{(e)}}{dx} \frac{d\phi_1^{(e)}}{dx} dx & \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} E(x)A(x) \frac{d\phi_2^{(e)}}{dx} \frac{d\phi_2^{(e)}}{dx} dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} p(x)\phi_1^{(e)}(x)dx \\ \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} p(x)\phi_2^{(e)}(x)dx \end{Bmatrix}, \quad (1.22)$$

devendo-se observar a simetria da matriz de rigidez do elemento

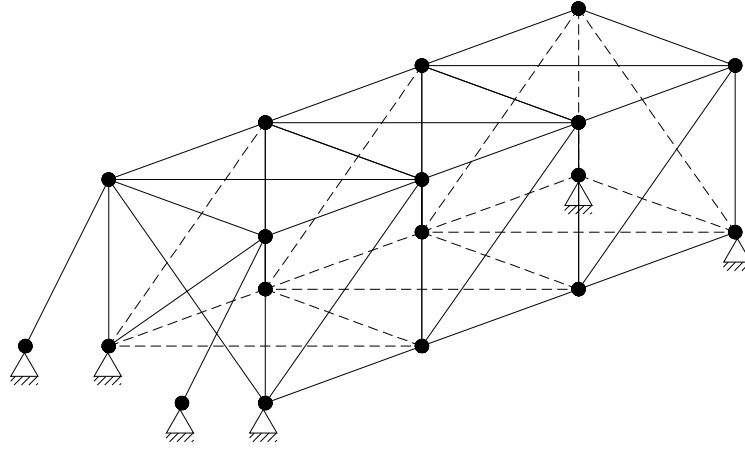


Figura 1.8: Estrutura treliçada.

Substituindo as expressões para  $\phi_i^{(e)}$  e  $\frac{d\phi_i^{(e)}}{dx}$  em (1.22), tomando  $p(x) = p$ ,  $E(x) = E$  e  $A(x) = A$  como constantes e efetuando as integrações indicadas vem que

$$\frac{EA}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} = \frac{ph_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (1.23)$$

ou em forma reduzida

$$[\bar{K}^{(e)}] \{\bar{u}^{(e)}\} = \{\bar{f}^{(e)}\}, \quad (1.24)$$

$[\bar{K}^{(e)}]$  é a matriz de rigidez local do elemento de barra.  $\{\bar{u}^{(e)}\}$  e  $\{\bar{f}^{(e)}\}$  são os vetores de deslocamentos e forças locais dos nós do elemento  $e$ .

Uma estrutura treliçada é constituída por barras unidas por articulações perfeitas como ilustrado na Figura 1.8. A transmissão das cargas aplicadas da estrutura até os apoios é realizada exclusivamente pela resistência das barras a tração e compressão. Para este tipo de estrutura, a partição numa malha de elementos finitos é óbvia. Os nós globais coincidem com os nós onde as barras se articulam. Os elementos finitos são as próprias barras compreendidas entre os nós. O comportamento global da treliça é obtido pela superposição das contribuições de cada elemento.

## 1.6 Transformação de Coordenadas Local-Global

No caso geral, o sistema de referência global adotado faz com que o elemento de barra esteja inclinado como ilustrado na Figura 1.9. Observa-se que  $\bar{X}$  é o sistema de referência local da barra. Portanto, deve-se efetuar uma transformação de coordenadas entre os sistemas local  $\bar{X}$  e global  $XYZ$ . Observa-se que no sistema global, cada nó tem 3 graus de liberdade de deslocamento indicados por  $u_i, v_i, w_i$  ( $i = 1, 2$ ) respectivamente nas direções  $X, Y$  e  $Z$ .

O comprimento  $l$  da barra pode ser obtido a partir das coordenadas globais dos nós  $e - 1$  e  $e$ , ou seja,  $(x_1, y_1, z_1)$  e  $(x_2, y_2, z_2)$ , respectivamente. Logo

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.25)$$

Como ilustrado na Figura 1.9 para o caso do plano  $XY$ , tem-se as seguintes relações trigonométricas para os co-senos diretores  $l_x, l_y$  e  $l_z$

$$l_x = \frac{x_2 - x_1}{l}, \quad l_y = \frac{y_2 - y_1}{l}, \quad l_z = \frac{z_2 - z_1}{l}. \quad (1.26)$$

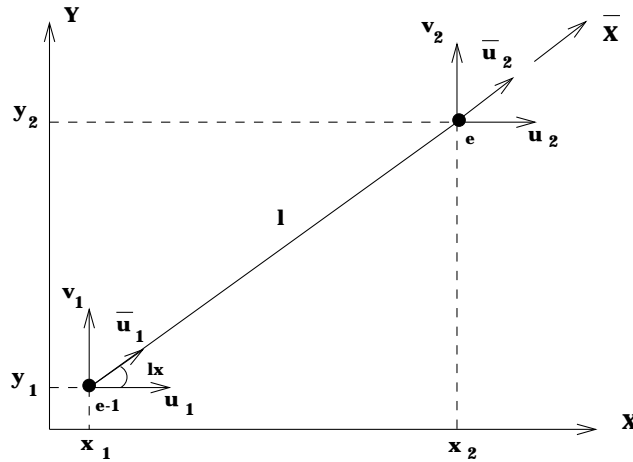


Figura 1.9: Elemento de barra no plano  $XY$ .

Além disso, verifica-se que

$$\begin{aligned} u_{e-1} &= l_x u_1 + l_y v_1 + l_z w_1, \\ u_e &= l_x u_2 + l_y v_2 + l_z w_2, \end{aligned}$$

ou em forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} u_{e-1} \\ u_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & l_y & l_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\bar{u}^{(e)}\} = [T]\{u^{(e)}\}. \quad (1.27)$$

Substituindo a relação (1.27) em (1.24) e multiplicando-se por  $[T]^T$  para manter a simetria da matriz de rigidez, obtém-se

$$[T]^T [\bar{K}^{(e)}] [T] \{u^{(e)}\} = [T]^T \{\bar{f}^{(e)}\} \rightarrow [K^{(e)}] \{u^{(e)}\} = \{f^{(e)}\}.$$

Portanto, a matriz de rigidez  $[K^{(e)}]$  do elemento de barra no sistema global é expressa por

$$[K^{(e)}] = [T]^T [\bar{K}^{(e)}] [T] = \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ l_y & 0 \\ l_z & 0 \\ 0 & l_x \\ 0 & l_y \\ 0 & l_z \end{bmatrix} \frac{EA}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & l_y & l_z \end{bmatrix}.$$

Efetuada a multiplicação indicada tem-se que

$$[K^{(e)}] = \frac{EA}{h_e} \begin{bmatrix} [K_0] & -[K_0] \\ -[K_0] & [K_0] \end{bmatrix}, \quad (1.28)$$

sendo  $[K_0] = \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y & l_x l_z \\ l_x l_y & l_y^2 & l_y l_z \\ l_x l_z & l_y l_z & l_z^2 \end{bmatrix}$ . Logo, em forma expandida

$$[K^{(e)}] = \frac{EA}{h_e} \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y & l_x l_z & -l_x^2 & -l_x l_y & -l_x l_z \\ l_x l_y & l_y^2 & l_y l_z & -l_x l_y & -l_y^2 & -l_y l_z \\ l_x l_z & l_y l_z & l_z^2 & -l_x l_z & -l_y l_z & -l_z^2 \\ -l_x^2 & -l_x l_y & -l_x l_z & l_x^2 & l_x l_y & l_x l_z \\ -l_x l_y & -l_y^2 & -l_y l_z & l_x l_y & l_y^2 & l_y l_z \\ -l_x l_z & -l_y l_z & -l_z^2 & l_x l_z & l_y l_z & l_z^2 \end{bmatrix}$$

Analogamente, tem-se que o vetor de carregamento  $\{f^{(e)}\}$  no sistema global é calculado como

$$\{f^{(e)}\} = [T]^T \{\bar{f}^{(e)}\} = \frac{ph_e}{2} \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ l_y & 0 \\ l_z & 0 \\ 0 & l_x \\ 0 & l_y \\ 0 & l_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{ph_e}{2} \begin{Bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \\ l_x \\ l_y \\ l_z \end{Bmatrix}. \quad (1.29)$$

A deformação específica  $\epsilon^{(e)}$  no  $e$ -ésimo elemento é calculada através de (1.7) e (1.18), ou seja,

$$\begin{aligned} \epsilon^{(e)} &= \frac{du_n^{(e)}}{dx} + \epsilon_0^{(e)} = \frac{d}{dx} [\bar{u}_1 \phi_1^{(e)}(x) + \bar{u}_2 \phi_2^{(e)}(x)] + \epsilon_0^{(e)} \\ &= \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} + \epsilon_0^{(e)} = [\bar{B}^{(e)}] \{\bar{u}^{(e)}\} + \epsilon_0^{(e)}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

sendo  $[\bar{B}^{(e)}]$  e  $\epsilon_0^{(e)}$ , respectivamente, a matriz de deformação local e a deformação inicial do elemento  $e$ . Substituindo (1.27) na expressão anterior, tem-se a deformação expressa em termos dos deslocamentos globais  $(u_1, v_1, w_1)$  e  $(u_2, v_2, w_2)$

$$\begin{aligned}
\epsilon^{(e)} &= \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & l_y & l_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} + \epsilon_0^{(e)} \\
&= \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} -l_x & -l_y & -l_z & l_x & l_y & l_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} + \epsilon_0^{(e)} = [B^{(e)}] \{u^{(e)}\} + \epsilon_0^{(e)}. \quad (1.31)
\end{aligned}$$

$[B^{(e)}]$  é denominada matriz de deformação global do elemento  $e$ .

Através da equação constitutiva (1.4), calcula-se a tensão  $\sigma^{(e)}$  no  $e$ -ésimo elemento, ou seja,

$$\sigma^{(e)} = E\epsilon^{(e)}. \quad (1.32)$$

Para o caso de um problema bidimensional, basta eliminar as linhas e colunas correspondentes aos deslocamentos  $w_1$  e  $w_2$  na direção  $z$ . Assim, a matriz de rigidez, o vetor de forças nodais equivalentes e a deformação dadas respectivamente nas expressões (1.28) a (1.30) se reduzem a

$$[K^{(e)}] = \frac{EA}{h_e} \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y & -l_x^2 & -l_x l_y \\ l_x l_y & l_y^2 & -l_x l_y & -l_y^2 \\ -l_x^2 & -l_x l_y & l_x^2 & l_x l_y \\ -l_x l_y & -l_y^2 & l_x l_y & l_y^2 \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

$$\{f^{(e)}\} = \frac{ph_e}{2} \{ l_x \quad l_y \quad l_x \quad l_y \}^T, \quad (1.34)$$

$$\epsilon^{(e)} = \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} -l_x & -l_y & l_x & l_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}. \quad (1.35)$$

## 1.7 Elementos de Barra no Ansys

No ANSYS, tem-se os elementos de barra LINK1 e LINK8, respectivamente, para problemas bi e tridimensionais.

## 1.8 Exercício Resolvido

Para ilustrar o uso do elemento LINK1, considere a treliça mostrada na Figura 1.10. O módulo de elasticidade e a área da secção transversal das barras são, respectivamente,  $E = 21 \times 10^5 \text{ Kgf/cm}^2 = 21 \times 10^9 \text{ Kgf/m}^2$  e  $A = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$ .

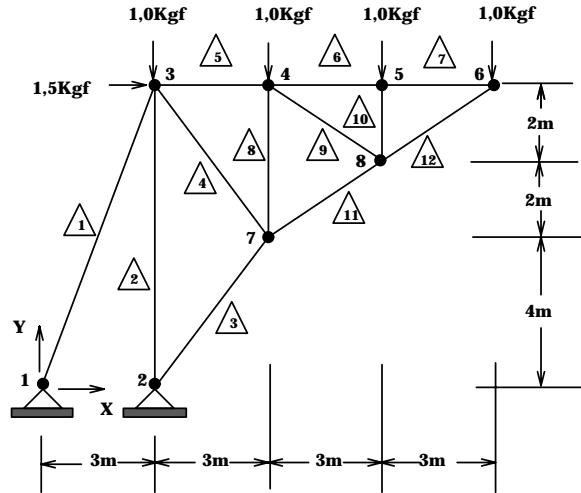


Figura 1.10: Treliça analisada com Ansys.

```

!Pre-processor
/PREP7

!tipo do elemento
ET,1,LINK1

!constante real:
!area da secção A = 1cm² = 10⁻⁴ m²
R,1,1E-4

!propriedade dos materiais:
!modulo de elasticidade E = 21E9 Kgf/cm²
MP,EX,1,21e9

!nos
N,1,0,0,0
N,2,3,0,0
N,3,3,8,0
N,6,12,8,0
N,6,12,8,0
FILL,3,6,2
N,8,9,6,0
N,7,6,4,0

!elementos
E,1,3
E,2,3
E,2,7
E,3,7
E,3,4
E,4,5
E,5,6
E,4,7
E,4,8
E,5,8
E,7,8
E,6,8

!salva banco de dados
SAVE

!sai do pre-processor
FINI

!Solucao
/SOLU

!condicoes de contorno: deslocamentos nulos
D,1,ALL,0,0,2,1

!forças verticais de -1Kgf
F,3,FY,-1,0,6,1

!força horizontal
F,3,FX,1.5

!salva banco de dados
SAVE

!tipo de análise: estática
ANTYPE,0

!resolve o problema
SOLVE

!abandona solver
FINI

!pos-processor
/POST1

!geometria original e deformada
PLDISP,1

!sai do pos-processor
FINISH

```

## 1.9 Exercícios Propostos

**Exercício 1.1** Traçar os diagramas da força normal e deslocamento axial para a barra ilustrada na Figura 1.11, através da integração da equação diferencial.

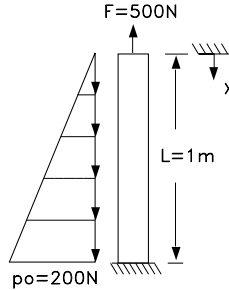


Figura 1.11: Barra submetida a uma carga distribuída linear.

**Exercício 1.2** Determinar a forma fraca para o problema do exemplo anterior.

**Exercício 1.3** Determinar o vetor equivalente de forças nodais  $\{\bar{f}^{(e)}\}$  no elemento de barra para os perfis de carregamento ilustrados na Figura 1.12.

Figura 1.12: Carregamentos no elemento de barra.

**Exercício 1.4** Determine a matriz de rigidez local  $[\bar{K}^{(e)}]$  para o elemento de 3 nós ilustrados na Figura 1.13.

Figura 1.13: Elemento de barra de 3 nós.

**Exercício 1.5** Resolver a treliça ilustrada na Figura 1.14 utilizando o Ansys. Utilizar módulo de elasticidade longitudinal  $E = 21 \times 10^5 \text{ Kgf/cm}^2$  e área da seção das barras  $A = 1,2 \text{ cm}^2$ . Quais são o deslocamento e tensão máxima na treliça.



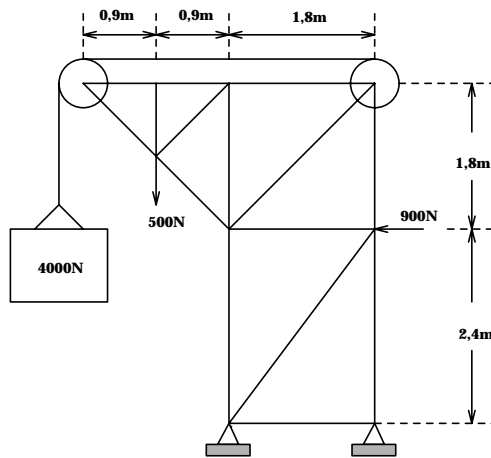


Figura 1.14: Treliça do exercício 1.5.