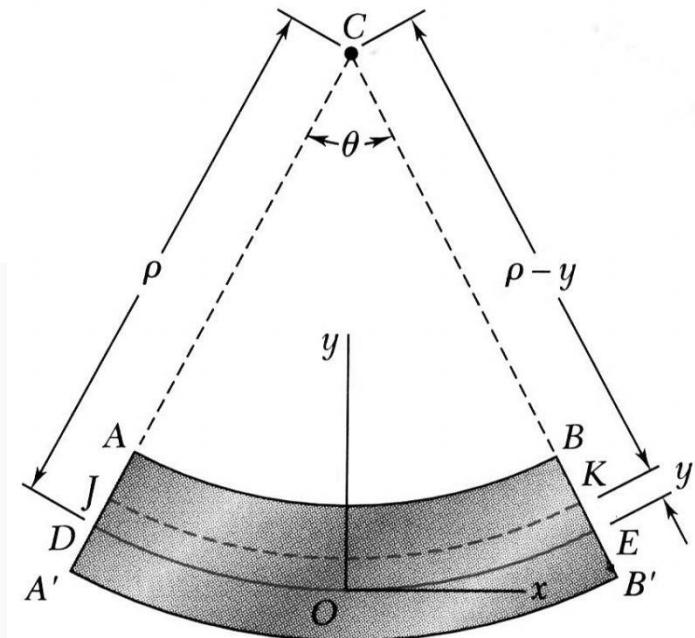
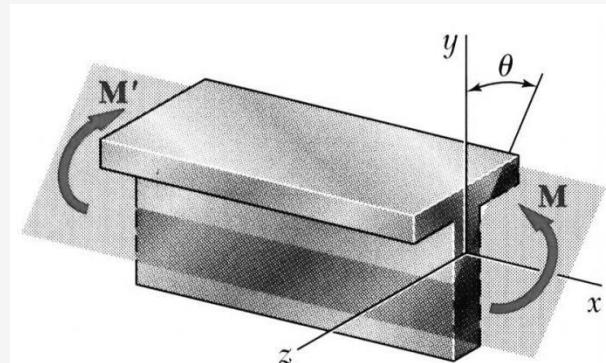
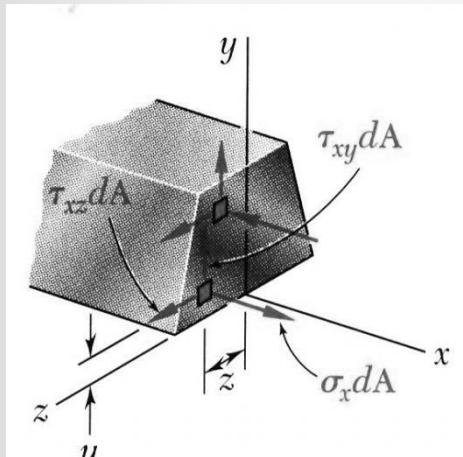


Resistência dos Materiais

Capítulo 4 - Flexão



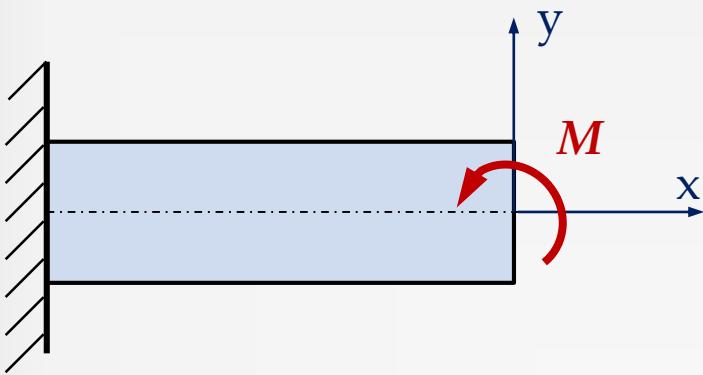
Acetatos e imagens baseados nos livros:

- Mechanics of Materials - Beer & Jonhson
- Mecânica e Resistência dos Materiais – V. Dias da Silva
- Resistência dos Materiais, R.C. Hibbeler

Índice

- Flexão Pura
- Flexão Simples
- Flexão Composta
- Deformações por flexão
- Extensão devido a flexão
- Propriedades das secções de viga
- Deformações numa secção transversa
- Concentração de Tensões
- Flexão desviada
- Equação da Línea Elástica

Flexão Pura e Flexão Simples

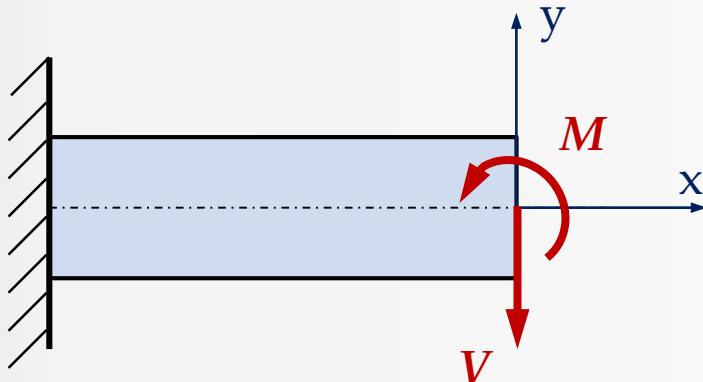


Flexão Pura

Quando os elementos prismáticos estão sujeitos apenas a **momentos fletores** iguais e opostos no mesmo plano.

$$M = \text{Constante}; V = 0; N = 0; T = 0$$

$$\left(\frac{dM}{dx} = V \right)$$



Flexão Simples ou Flexão Transversal

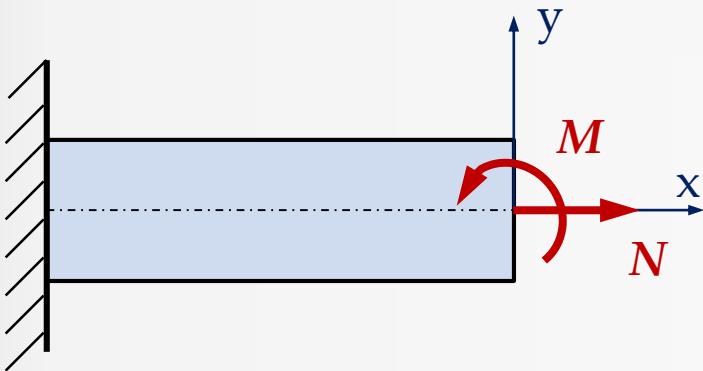
Cargas transversais concentradas ou distribuídas produzem forças internas equivalentes a uma força de corte (**esforço transverso**) e a **momentos fletores**.

$$M \neq 0; V \neq 0; N = 0; T = 0$$

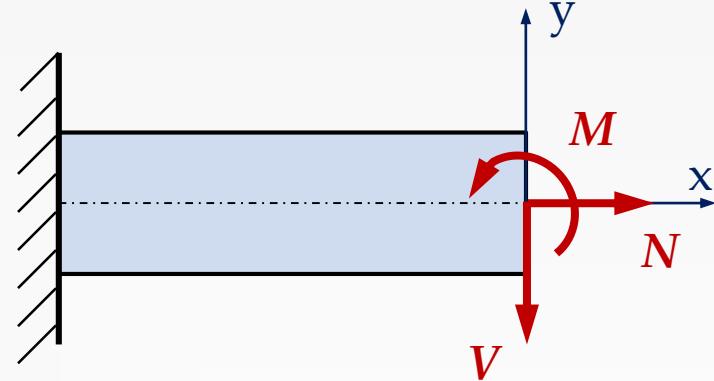
Flexão Composta

Flexão Composta

A tensão normal provocada por flexão pura pode ser composta com a tensão normal devido à carga axial e com a tensão devida ao carregamento de corte e/ou pelo momento fletor.

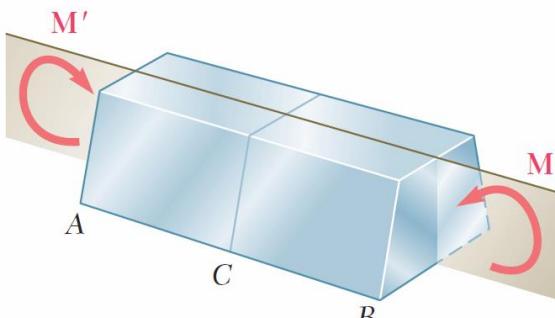


$$M \neq 0; V = 0; N \neq 0; T = 0$$



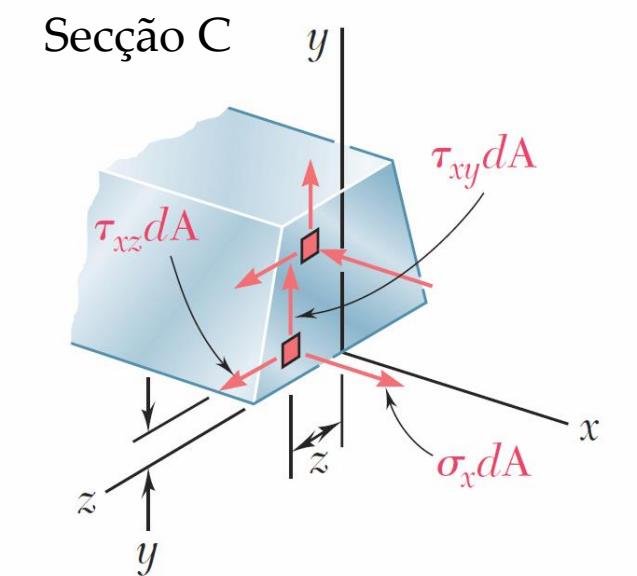
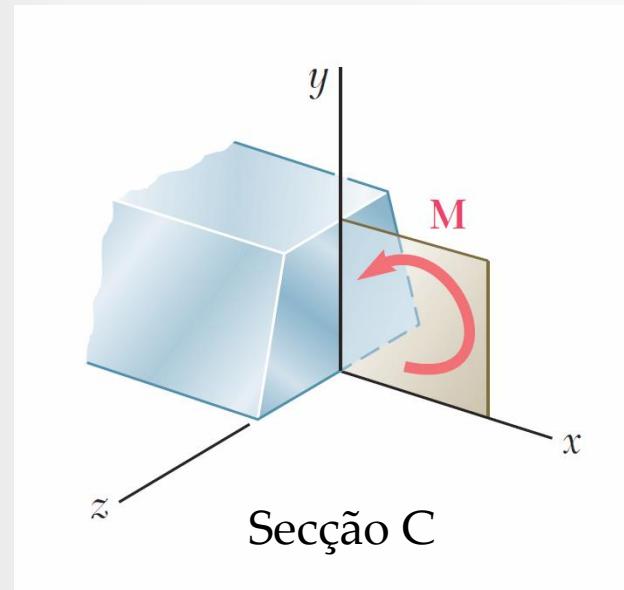
$$M \neq 0; V \neq 0; N \neq 0; T = 0$$

Flexão Pura – Equações de equilíbrio estático



Um binário $M-M'$ define-se como **dois momentos de igual intensidade e sentidos opostos**.

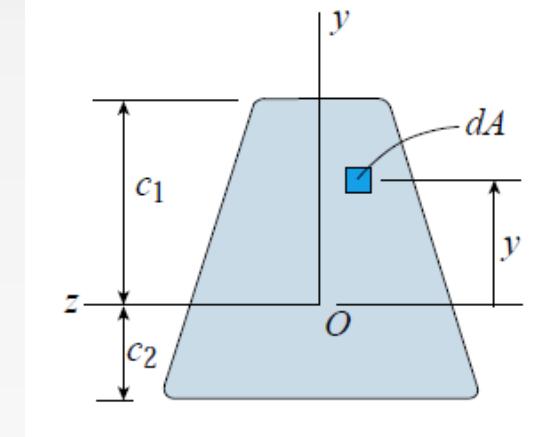
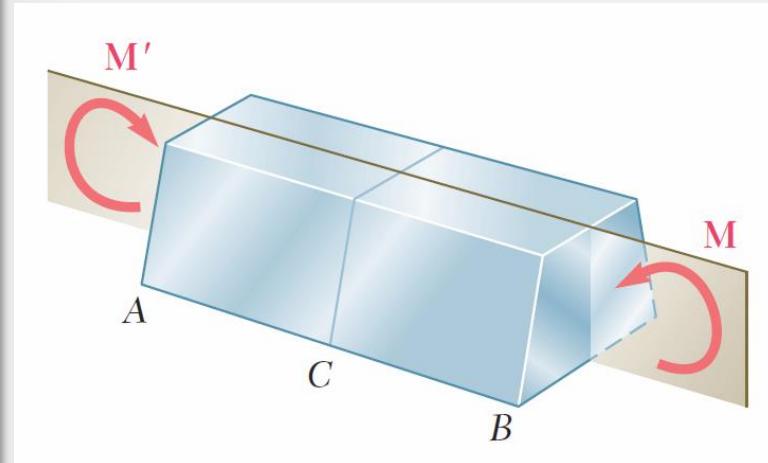
O momento M irá produzir uma distribuição de esforços $\sigma_x dA$ com a direção xx , produzindo assim na secção uma força resultante em xx , um momento segundo yy e outro momento segundo zz .



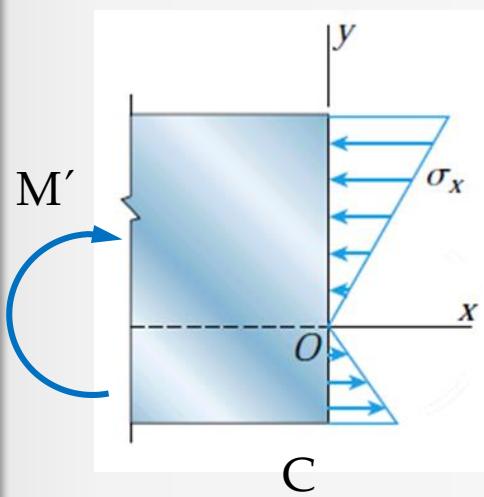
- A secção C está em equilíbrio estático logo os somatórios da resultante dos esforços são nulos:

$$\sum F_x = 0 ; \sum M_y = 0 \text{ e } \sum M_z = 0$$

Flexão Pura – Equilíbrio estático – M_z



Secção C

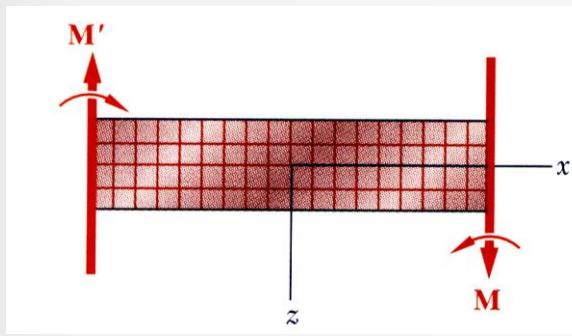
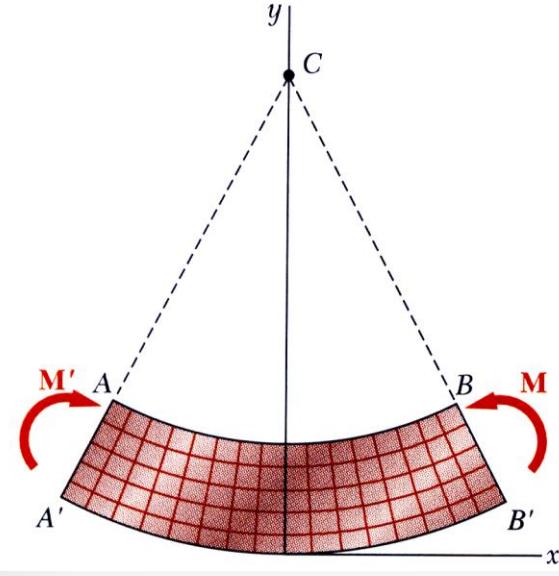


- O parte do corpo AC está em equilíbrio estático. A outra parte CB vai desenvolver um perfil **de tensões normais de compressão (-) e tensões normais de tração (+)** ao longo da secção C.
- As tensões normais σ_x **são negativas** quando a coordenada y for positiva.

Equilíbrio de momentos no eixo zz

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \int_A y \sigma_x dA + M' = 0 \Rightarrow$$

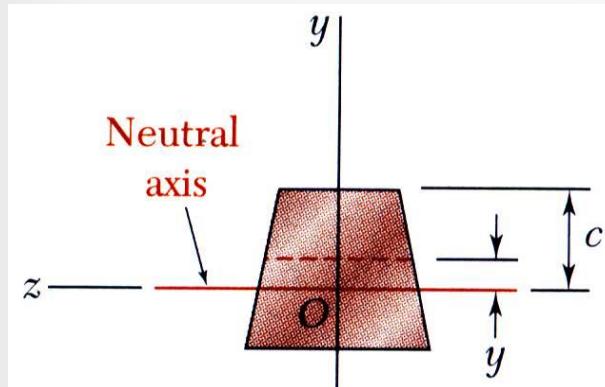
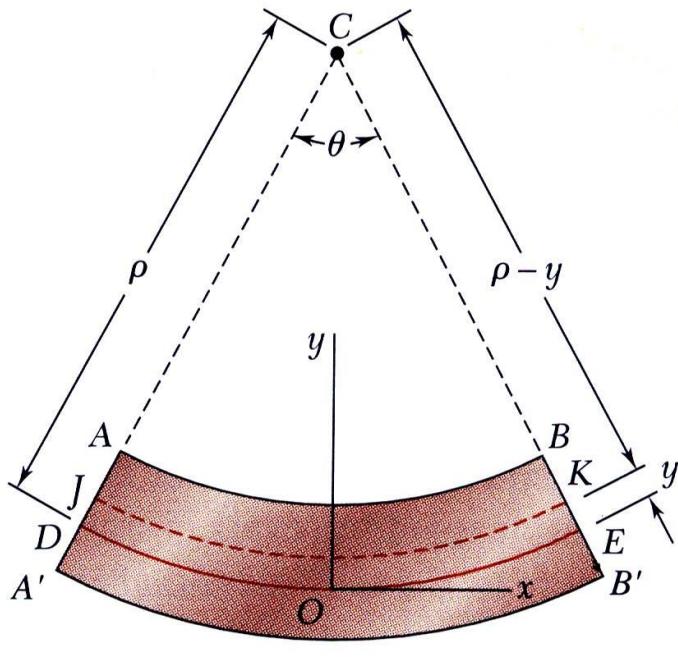
$$M = \int_A -y \sigma_x dA$$



Flexão Pura - Considerações

Viga com um plano de simetria em **flexão pura**:

- O elemento permanece simétrico;
- Flete uniformemente, formando um arco circular;
- A curvatura em todos os pontos da barra é a mesma;
- O plano transversal passa pelo centro do arco, mantendo-se plano;
- O comprimento AB diminui, enquanto o de $A'B'$ aumenta;
- Existe uma superfície neutra (fibra neutra), paralela às superfícies superior e inferior e para a qual não se verifica alteração do comprimento;
- As tensões e extensões são negativas (compressão) acima da fibra neutra e positivas (tração) abaixo;



Considerar um segmento de viga de comprimento L .

Após deformação, o comprimento da superfície neutra permanece inalterável. Nas restantes secções temos:

Deslocamento $L = \rho\theta \quad L' = (\rho - y)\theta$

$$\boxed{\delta_x = L' - L} = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

Extensões

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{L}} = -\frac{y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

$$\varepsilon_{max} = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{c}{\varepsilon_{max}} \Rightarrow \varepsilon_x = -\frac{y}{c} \varepsilon_{max}$$

c – distância entre a **fibra neutra** e a **fibra mais afastada**

$$\boxed{\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}}$$

A extensão varia linearmente com a coordenada y

Flexão Pura – Tensão normal

Num material linear-elástico, temos

$$\boxed{\sigma_x = E\varepsilon_x} = -\frac{y}{c}E\varepsilon_{max} \Rightarrow \sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_{max}$$

A tensão varia linearmente com a coordenada y

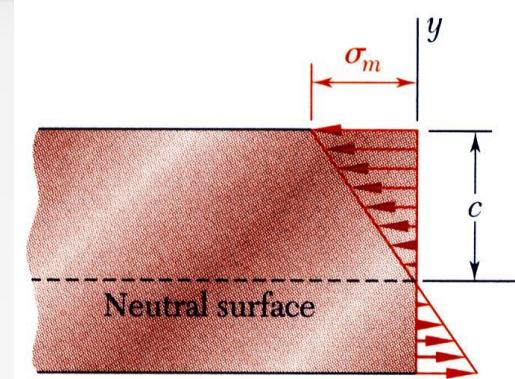
Pelo equilíbrio estático, $\sum F_x = 0$

$$\sum F_x = \int_A \sigma_x dA = 0$$

$$\sum F_x = \int_A -\frac{y}{c}\sigma_{max} dA = 0$$

$$\sum F_x = -\frac{\sigma_{max}}{c} \int_A y dA = 0$$

O 1º momento relativo ao plano neutro é zero. Portanto a superfície neutra tem de passar pelo centroide da secção.



Pelo equilíbrio estático, $\sum M_z = 0$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M = \int_A -y\sigma_x dA$$

$$M = \int_A -y \left(-\frac{y}{c}\sigma_{max} \right) dA$$

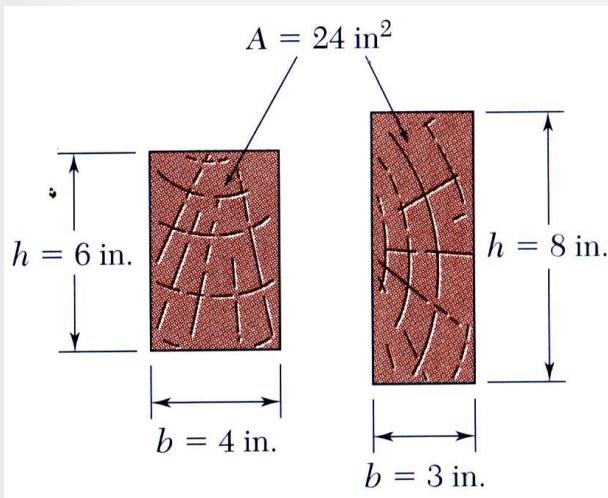
$$M = \frac{\sigma_{max}}{c} \int_A y^2 dA = \frac{\sigma_{max}}{c} I_z \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{Mc}{I_z}}$$

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_{max} \Rightarrow \sigma_x = -\frac{y Mc}{c I_z}$$

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{My}{I_z}}$$

I_z – momento de inercia

Vigas - Módulo de elasticidade da secção



A tensão normal máxima provocada por flexão é dada por:

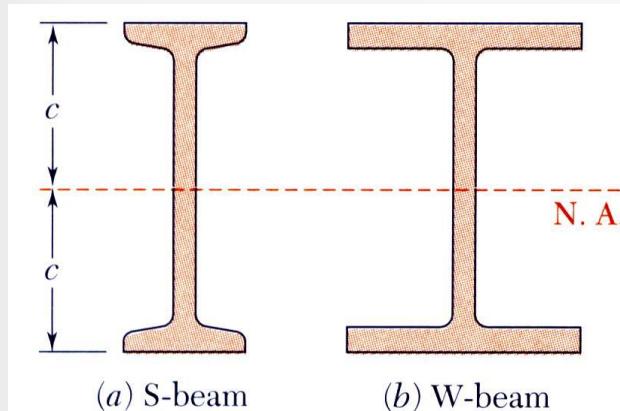
$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I_z} = \frac{M}{S}$$

S – módulo de elasticidade da secção

Uma viga com maior S terá, logicamente, menor valor de tensão máxima.

Considerando uma viga retangular,

$$S = \frac{I_z}{c} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}Ah$$

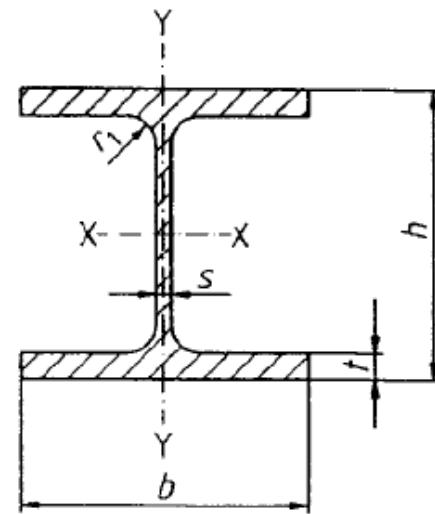


Entre 2 vigas retangulares com igual área transversal, a que possuir maior h terá maior capacidade de resistência à flexão.

Os perfis normalizados (I, H, U, etc.) são projetados para possuir elevados valores de S .

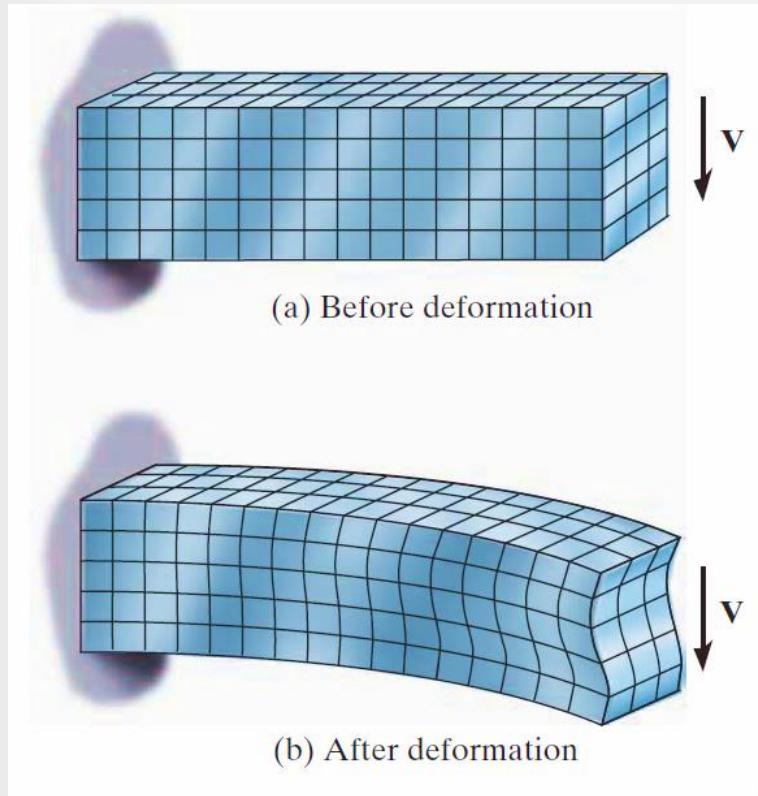
Vigas - Propriedades de perfis normalizados

Norma
DIN 1025-2



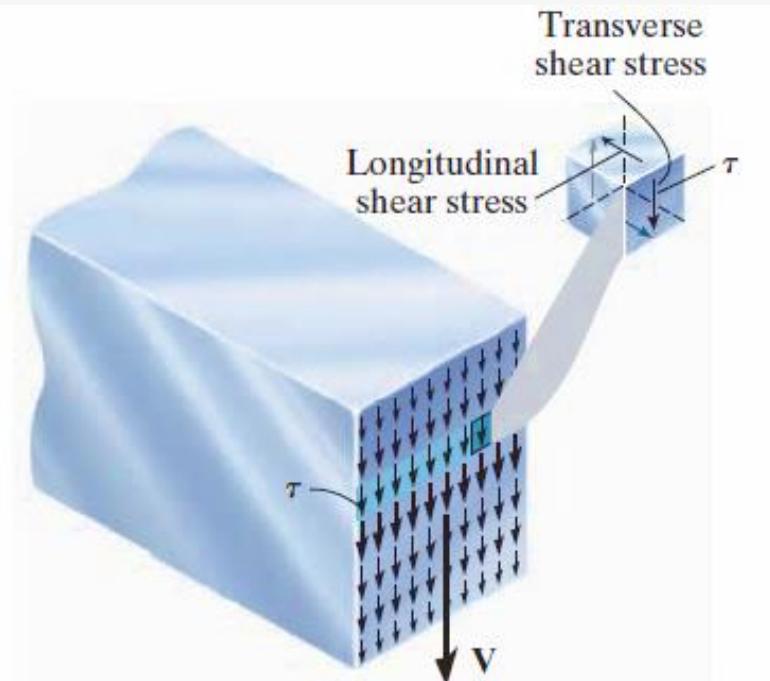
Section symbol*)	Dimensions for					Section area, in cm ²	Mass, in kg/m	Surface area, in m ² /m	I_x cm ⁴	$x-x$			$y-y$		
	h	b	s	t	r_1					S_x cm ³	i_x cm	I_y cm ⁴	S_y cm ³	i_y cm	
IPB															
100	100	100	6	10	12	26,0	20,4	0,567	450	89,9	4,16	167	33,5	2,53	
120	120	120	6,5	11	12	34,0	26,7	0,686	864	144	5,04	318	52,9	3,06	
140	140	140	7	12	12	43,0	33,7	0,805	1 510	216	5,93	550	78,5	3,58	
160	160	160	8	13	15	54,3	42,6	0,918	2 490	311	6,78	889	111	4,05	
180	180	180	8,5	14	15	65,3	51,2	1,04	3 830	426	7,66	1 360	151	4,57	

Flexão Simples ou Flexão Transversal – esforço transverso



Esforço Transverso

As estruturas sujeitas ao esforço de corte sofrem internamente tensões de corte que variam ao longo da sua seção.

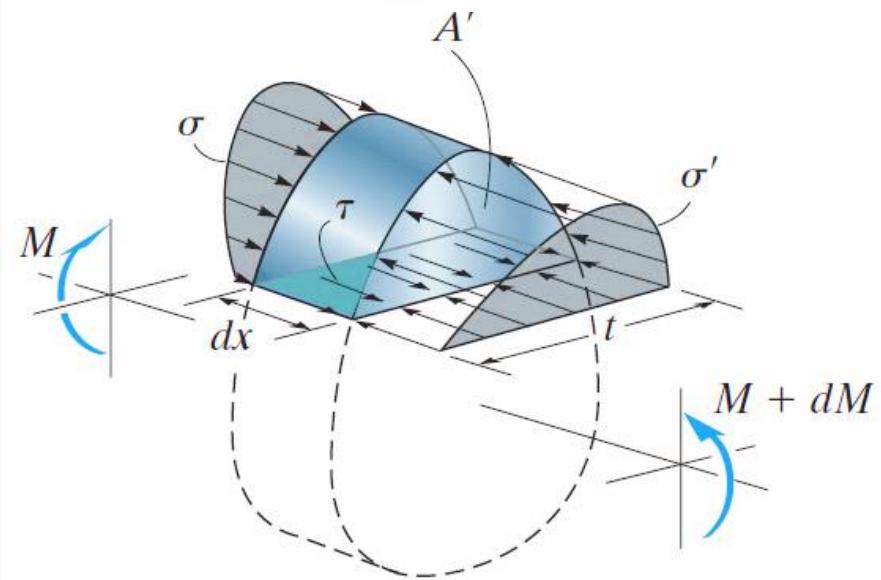
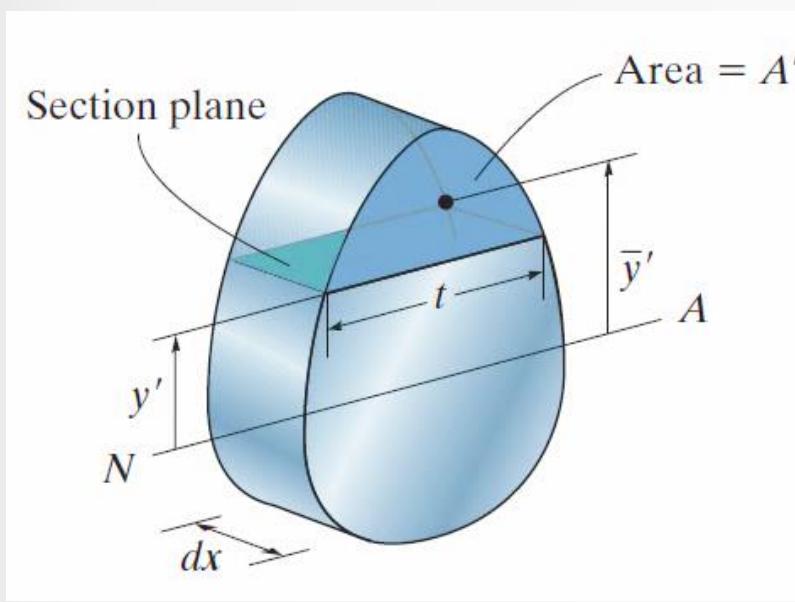
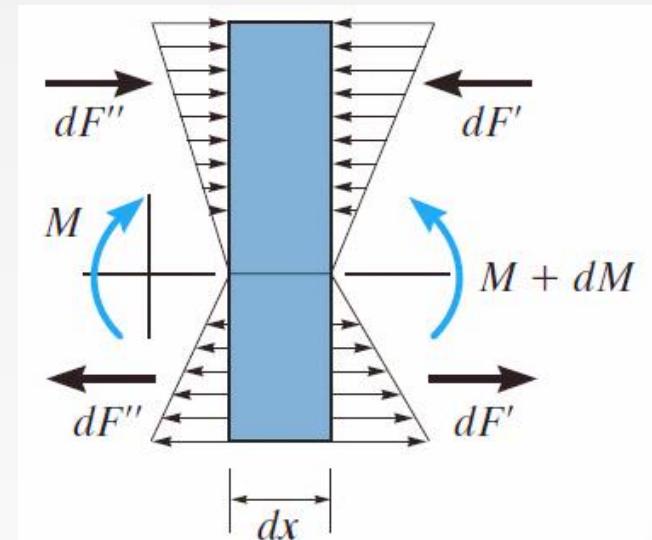
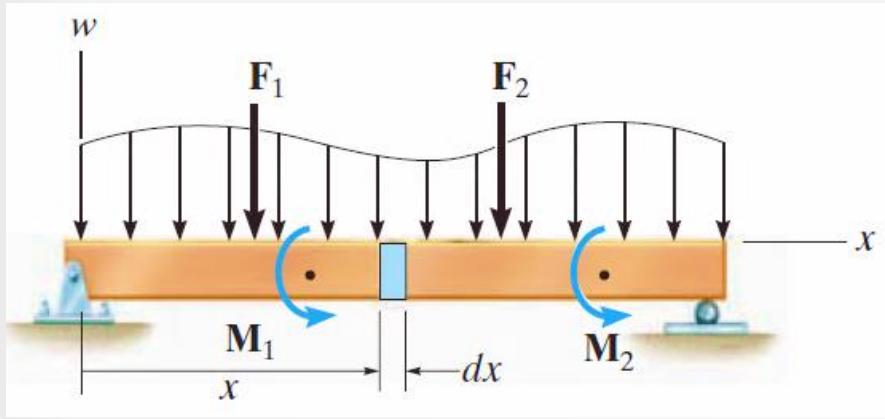


Quando o esforço transverso é significativo as secções já não se mantêm planas.

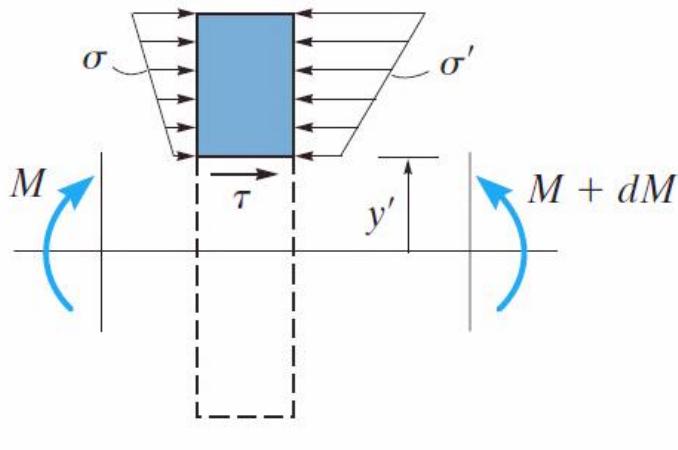
A tensão de corte é **geralmente ignorada** quando a razão entre comprimento e a altura da viga for igual ou superior a 10.

Flexão Simples ou Flexão Transversal – esforço transverso

Determinação das tensões de corte.



Flexão Simples ou Flexão Transversal – esforço transverso



Fazendo o equilíbrio das forças, $\sum F_x = 0$

$$\tau(tdx) + \int_{A'} \sigma dA' - \int_{A'} \sigma' dA' = 0 \Rightarrow$$

$$\tau(tdx) = - \int_{A'} \left(\frac{M}{I_z} \right) y dA' + \int_{A'} \left(\frac{M + dM}{I_z} \right) y dA'$$

$$\Rightarrow \tau(tdx) = \left(\frac{dM}{I_z} \right) \int_{A'} y dA' \Rightarrow \tau = \frac{1}{t I_z} \left(\frac{dM}{dx} \right) \int_{A'} y dA'$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

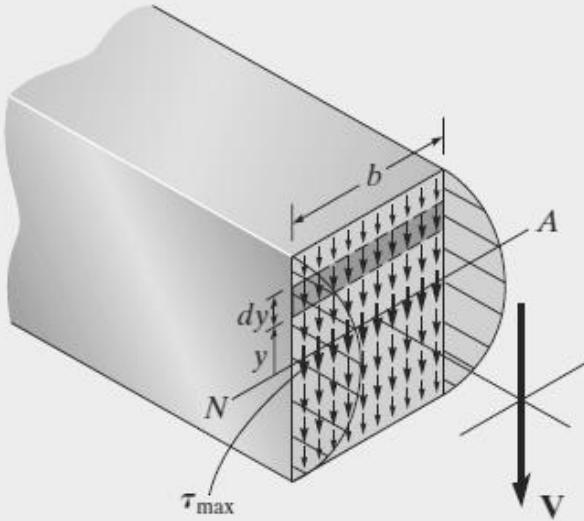
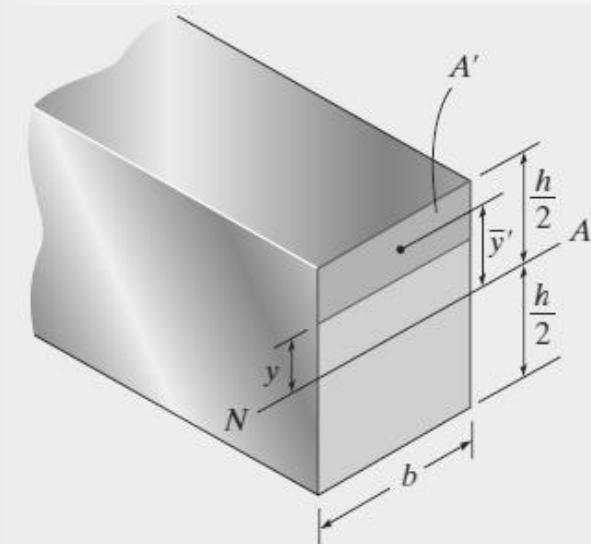


$$Q = \int_{A'} y dA' = \bar{y}' A'$$

Momento estático de Inercia
da figura plana
em relação a linha neutra

$$\boxed{\tau = \frac{VQ}{t I_z}}$$

Vigas de secção retangular



Momento estático de Inercia

$$Q = \bar{y}' A' = \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] \left(\frac{h}{2} - y \right) b$$

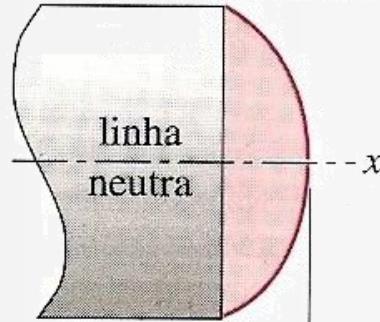
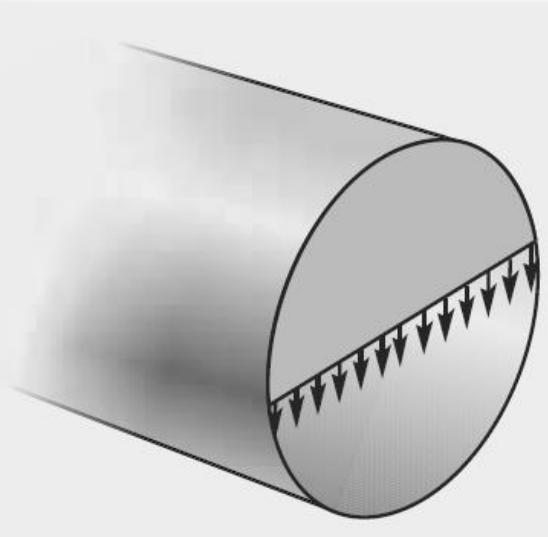
$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) b \quad I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$\boxed{\tau = \frac{VQ}{t I_z} = \frac{6V}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}$$

A distribuição da tensão de corte é parabólica.
A tensão de corte é máxima em $y = 0$.

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{3V}{2A}}$$

Vigas de secção circular



$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{V}{A}$$

Momento estático
de Inercia

$$Q = \bar{y}' A' = \frac{2}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}$$

Momento de Inercia

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$\tau = \frac{VQ}{t I_z} = \frac{4}{3} \frac{V}{\pi R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

A distribuição da tensão de corte é parabólica.
A tensão de corte é máxima em $r = 0$.

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{V}{A}}$$

Flexão Pura desviada

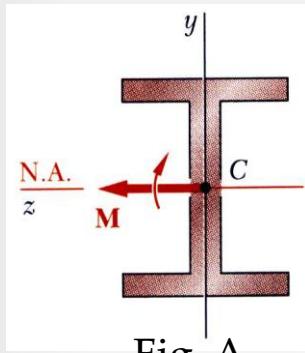


Fig. A

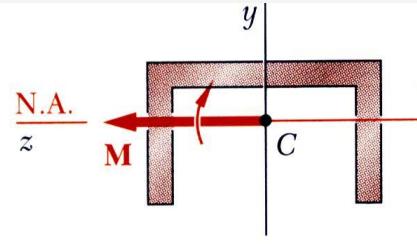


Fig. B

- Até agora, a análise de flexão pura esteve limitada a elementos sujeitos a momentos fletores que **atuam num plano de simetria do elemento** (Fig. A e B).
- Os elementos permanecem simétricos e **fletem no plano de simetria**.

- O **eixo neutro** da secção coincide com o eixo do momento.

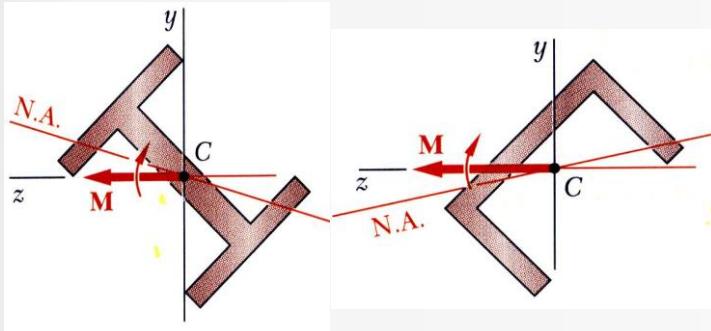


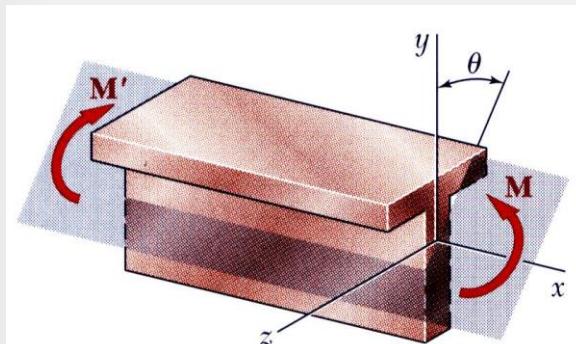
Fig. C

Fig. D

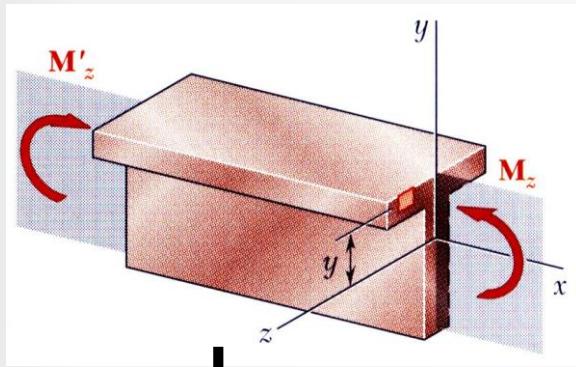
- Consideramos agora situações em que os **momentos não atuam num plano de simetria do elemento** (Fig. C e D).

- **Não se pode assumir** que o elemento irá fletir segundo o plano do momento.
- Nestas situações, geralmente, a **fibra neutra da secção não coincide com o eixo do momento**.

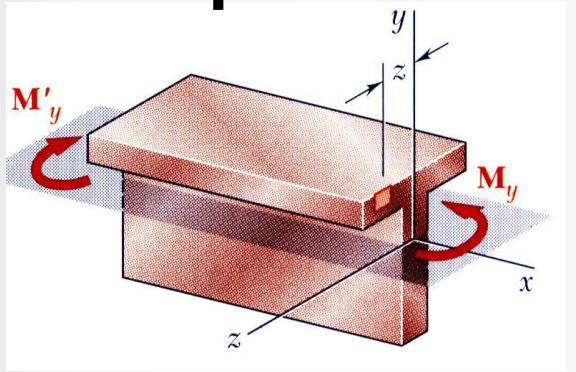
Flexão Pura desviada



=



+



O princípio da sobreposição é aplicado para determinar a distribuição de tensões na situação mais geral de Flexão Pura desviada.

Decompor o momento nas respetivas componentes segundo cada uma das direções:

$$M_z = M \cos(\theta) \quad M_y = M \sin(\theta)$$

Associar as tensões existentes em cada direção:

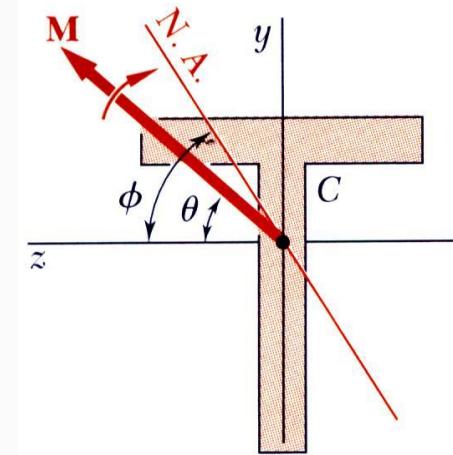
$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

No linha neutro temos, $\sigma_x = 0$

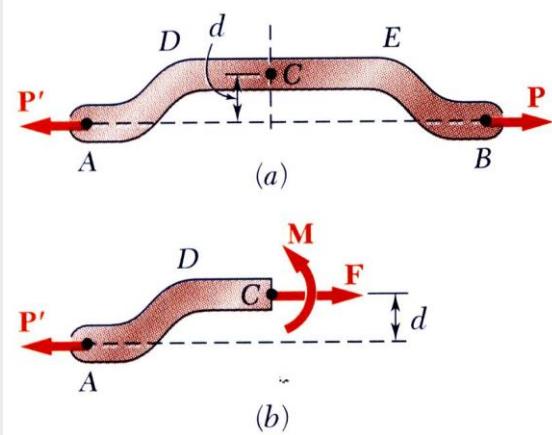
$$-\frac{M \cos(\theta) y}{I_z} + \frac{M \sin(\theta) z}{I_y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{I_z \sin(\theta)}{I_y \cos(\theta)} = \frac{y}{z} = \operatorname{tg}(\phi)$$

$$y = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg}(\theta) \cdot z$$



Flexão Composta



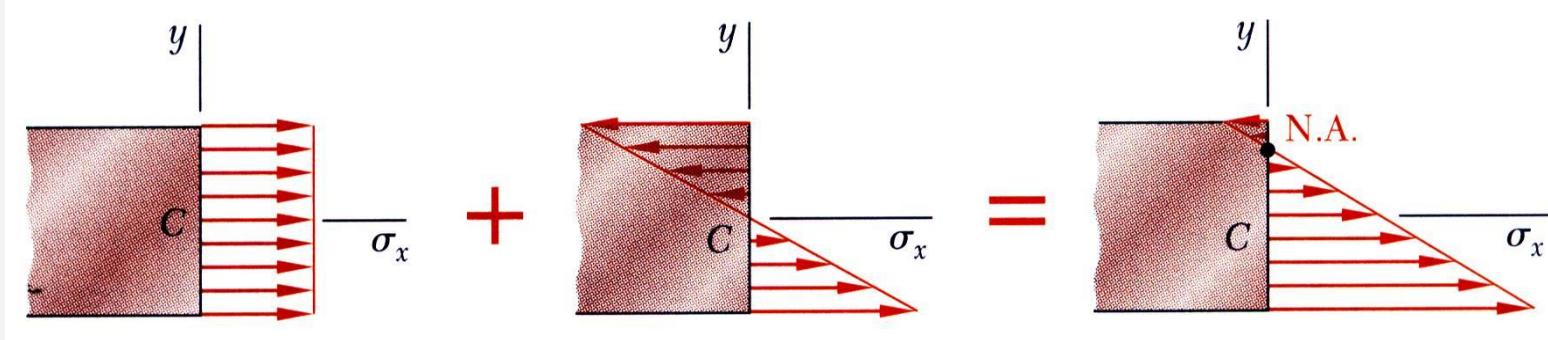
$$M \neq 0; V = 0; N \neq 0; T = 0$$

A distribuição de tensão devida a cargas excêntricas é **determinada por sobreposição** de:

- distribuição uniforme devida à carga centrada;
- distribuição linear devida ao momento fletor;

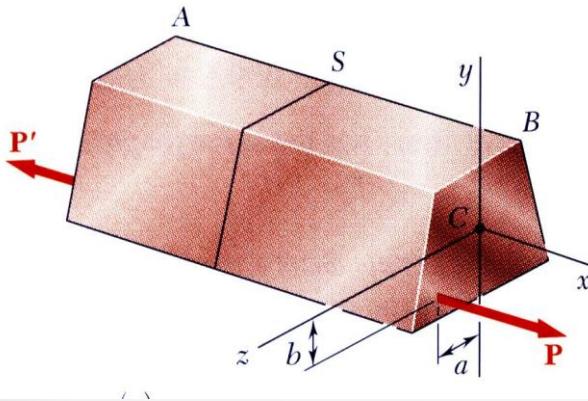
Carregamento Excêntrico: $F = P$ $M_z = Pd$

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{axial} + (\sigma_x)_{flexão} = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z}$$



A validade deste resultado requer que:

- as tensões fiquem abaixo do limite proporcionalidade;
- as deformações tenham efeito desprezável na geometria;
- as tensões não sejam determinadas na vizinhança dos pontos de aplicação da força;

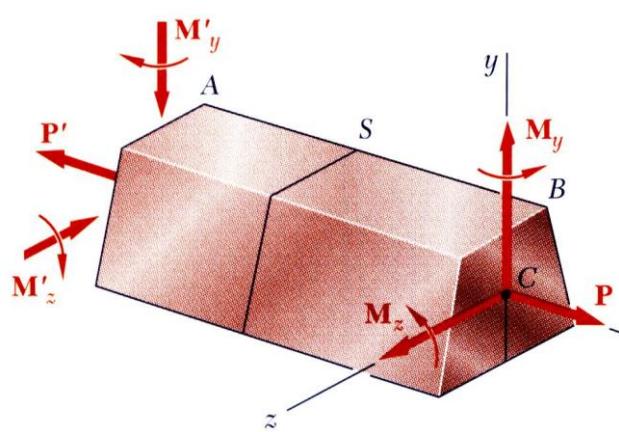


- Considerar um elemento reto solicitado por forças excêntricas iguais e opostas.
- Por equilíbrio estático, a força excêntrica é equivalente a uma força centrada e a dois momentos:

$$P - \text{Carga concentrada} \quad M_y = Pa \quad M_z = Pb$$

Pelo **princípio da sobreposição**, a distribuição de tensões é dada por:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

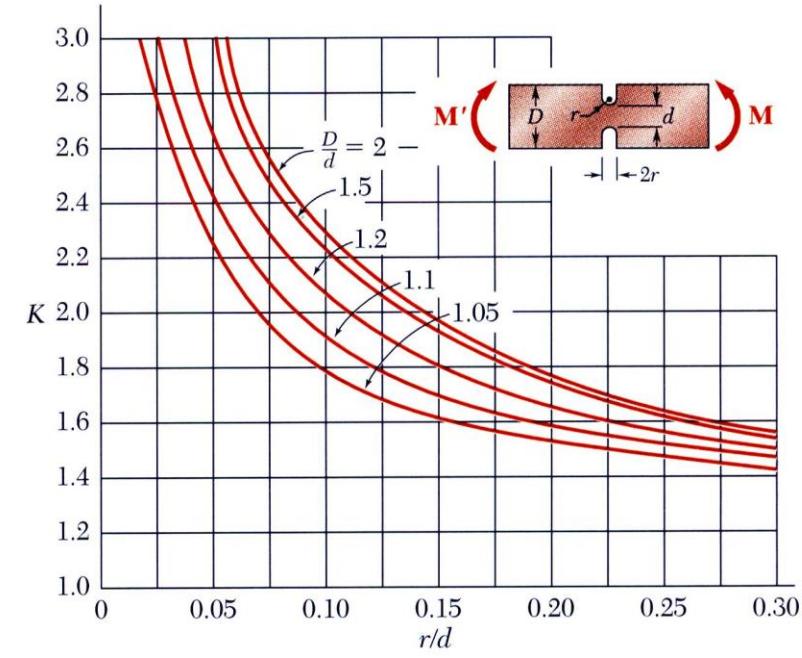
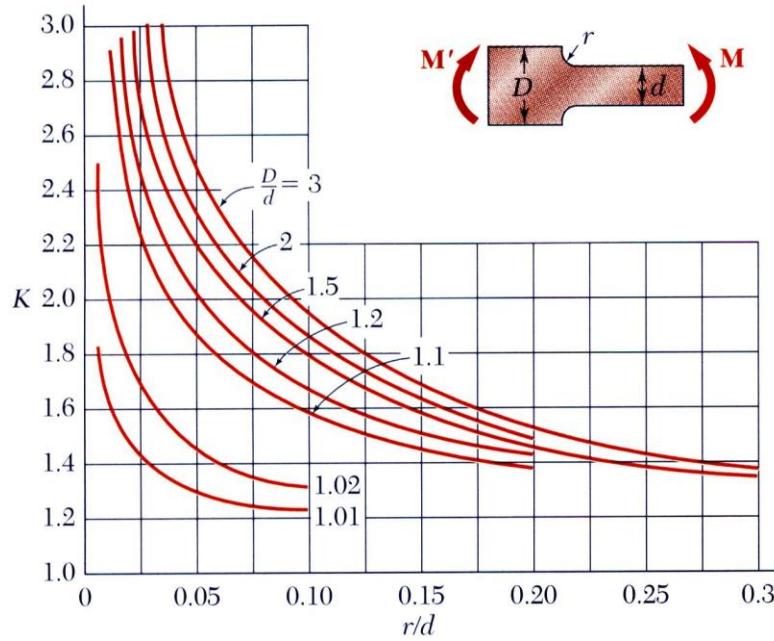


Como a **linha neutra** $\sigma_x = 0$ pode ser determinada segundo:

$$\frac{M_z y}{I_z} = \frac{P}{A} + \frac{M_y z}{I_y} \Rightarrow$$

$$y = \frac{I_z M_y}{I_y M_z} z + \frac{P I_z}{A M_z}$$

Concentração de Tensões

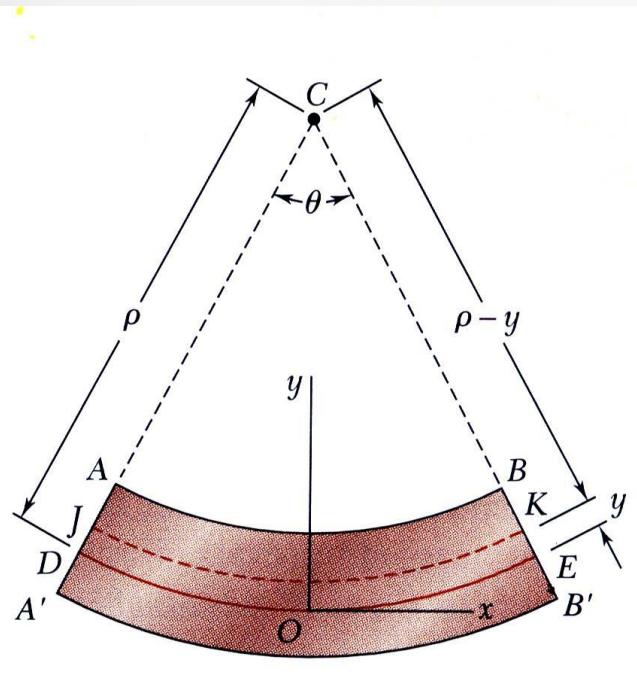
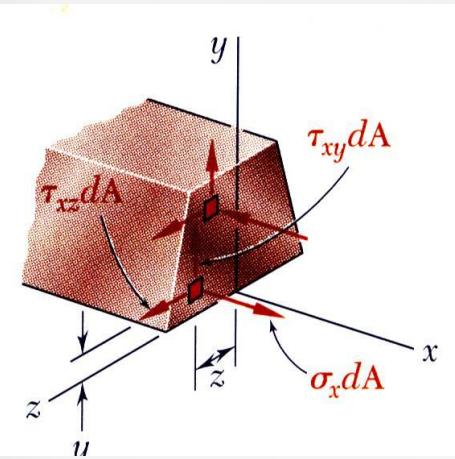


A concentração de tensões pode ocorrer:

- Na vizinhança dos pontos onde os esforços são aplicados;
- Na vizinhança de variações bruscas de secção;

$$\sigma_{max} = K_t \frac{Mc}{I}$$

Equação da Linha Elástica



Retomando o equilíbrio estático na secção e a extensão segundo o eixo x , temos;

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad \sigma_x = E\varepsilon_x$$

$$\sigma_x = -\frac{Ey}{\rho} \quad M_z = \int_A -y\sigma_x dA$$

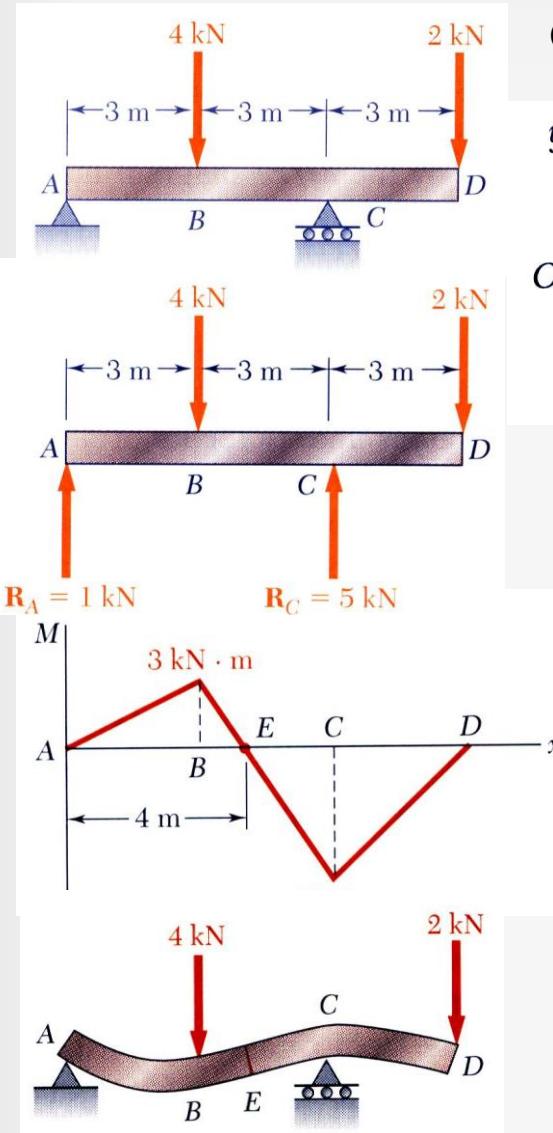
$$M_z = \int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA = \frac{EI_z}{\rho} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}}$$

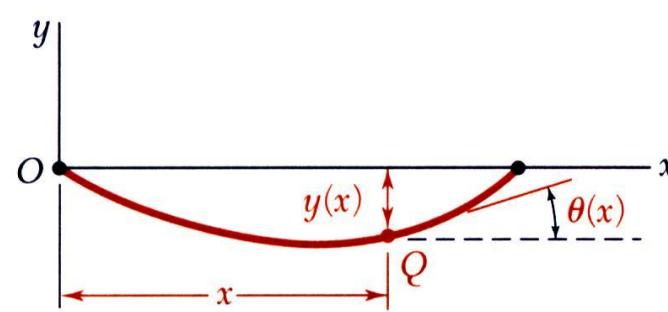
$\frac{1}{\rho}$ - Curvatura

ρ - Raio de curvatura

Equação da Linha Elástica



Considerando um ponto Q da linha elástica, temos:



$y(x)$ - deslocamento vertical

$\theta(x)$ - rotação da secção

Pelo cálculo matemático temos :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx}$$

As rotações são pequenas logo $\frac{dy}{dx}$ é muito pequeno

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z}}$$

Equação diferencial da linha elástica

Equação da Linha Elástica

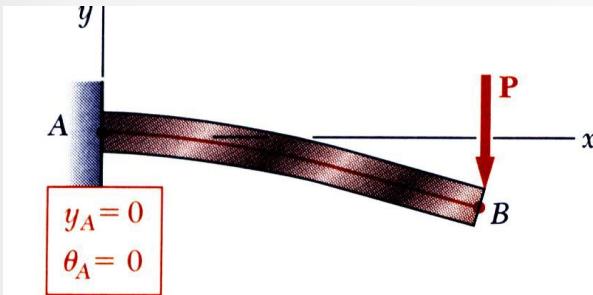
$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z}}$$

1º Integração

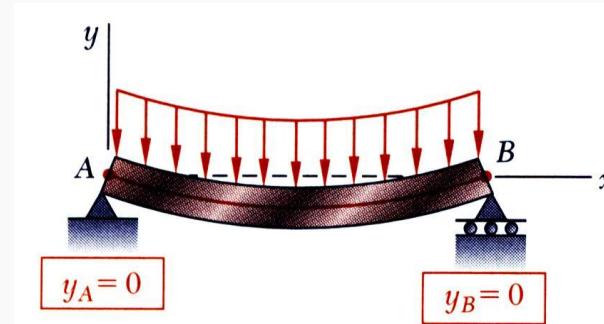
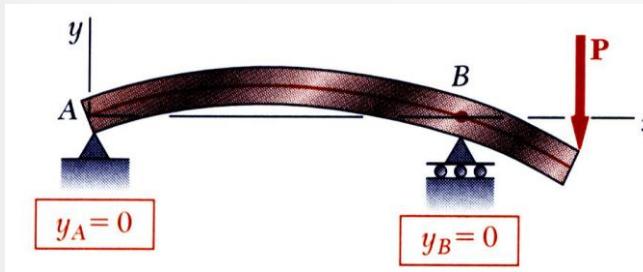
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \int \frac{M_z(x)}{EI_z} dx + C_1}$$

2º Integração

$$\boxed{y(x) = \int \int \frac{M_z(x)}{EI_z} dx + C_1 dx + C_2}$$

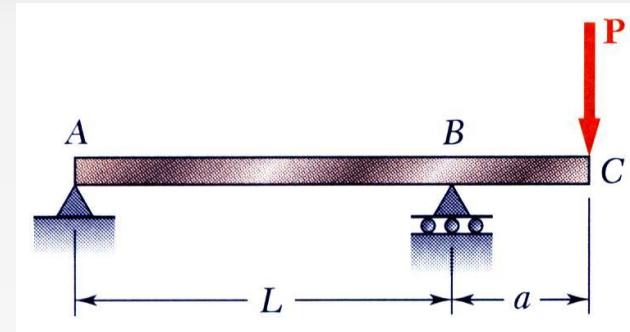


As constantes C_1 e C_2 são calculadas com as chamadas **condições de fronteira**

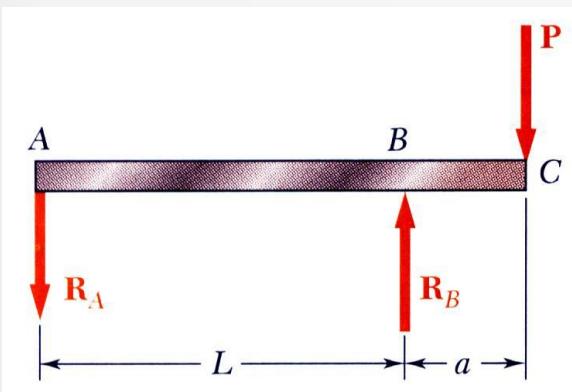


Equação da Linha Elástica - Exemplo

Exemplo



1 - Reações

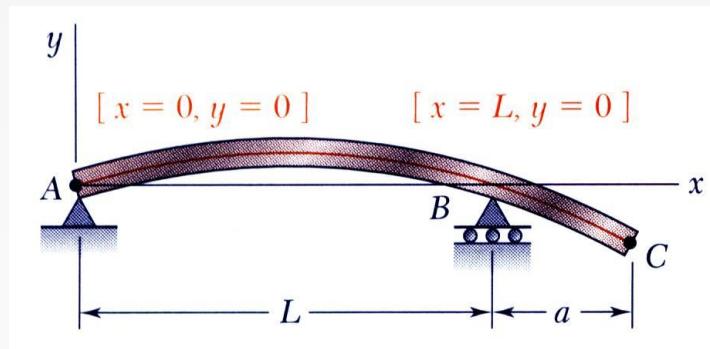


2 – Momento fletor

$$\frac{dV(x)}{dx} = \omega(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

3 - Condições de fronteira



4 - Deslocamentos

