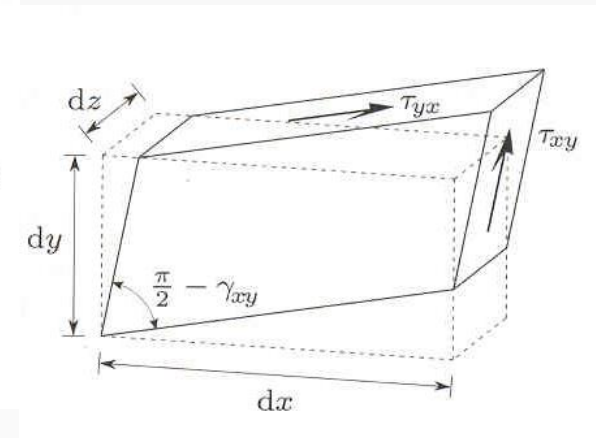
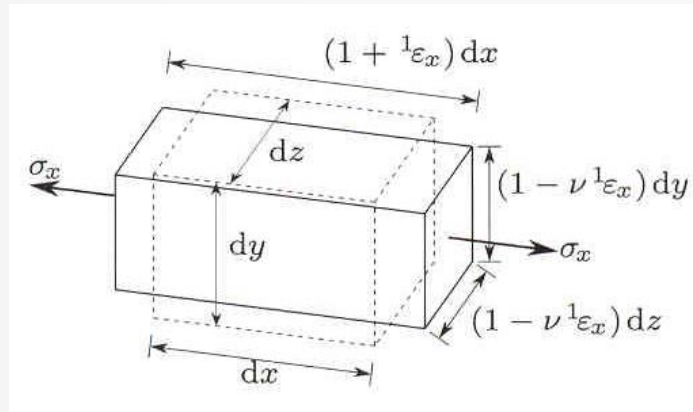
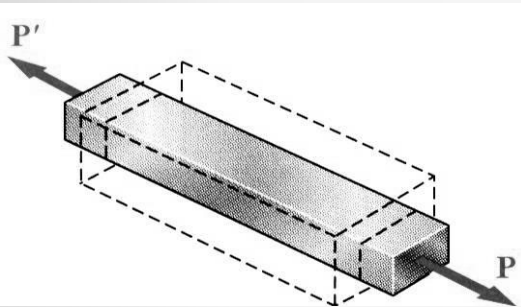


Resistência dos Materiais

Capítulo 2 Elasticidade Linear

- Lei de Hooke generalizada



Acetatos baseados nos livros:

- Mechanics of Materials - Beer & Jonhson
- Mecânica e Resistência dos Materiais – V. Dias da Silva

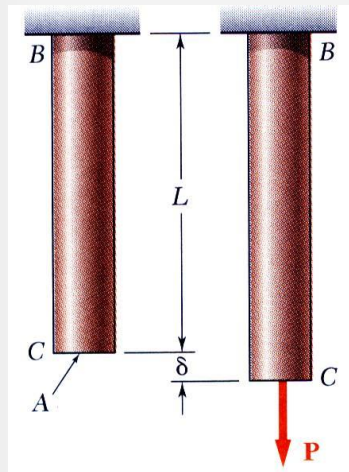


- Tensão e extensão – Tensão Normal - carregamento axial
- Ensaio de tração
- Diagrama de tensão - extensão: Materiais dúcteis
- Diagrama de tensão - extensão : Materiais frágeis
- Lei de Hooke: Módulo de Elasticidade
- Deformações de barras sujeitas a cargas axiais
- Problemas estatisticamente indeterminados
- Problemas que envolvem variação de temperatura
- Coeficiente de Poisson
- Lei de Hooke generalizada
- Dilatação volumétrica: Módulo de elasticidade de volume
- Tensão de corte
- Relação entre E , ν e G
- Concentração de tensões



Tensão e Extensão: Carregamento axial

Capítulo 2

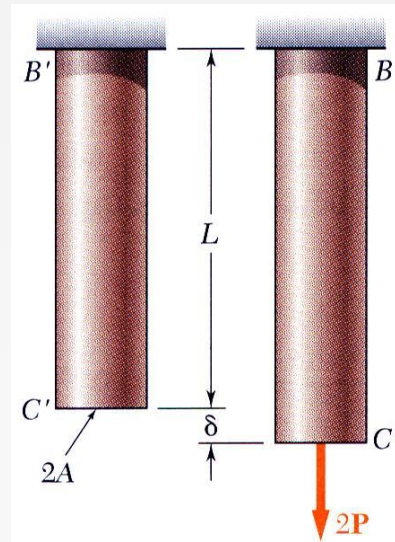


$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \text{Tensão}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad \text{Extensão}$$

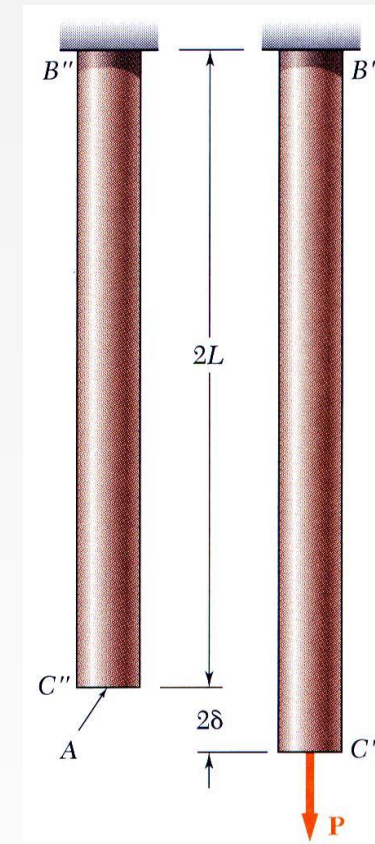
δ - Deslocamento

ε - Extensão (deformação)



$$\sigma = \frac{2P}{2A} = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$



$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{2\delta}{2L} = \frac{\delta}{L}$$

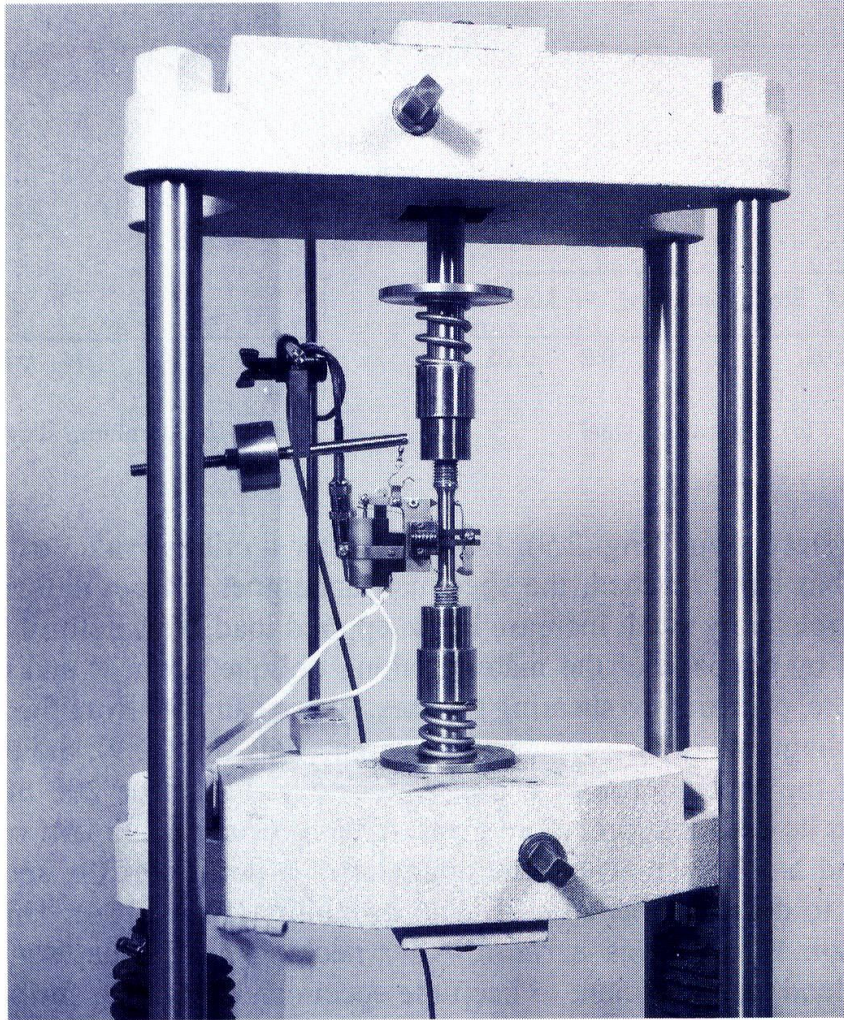


Fig. 2.7 This machine is used to test tensile test specimens, such as those shown in this chapter.

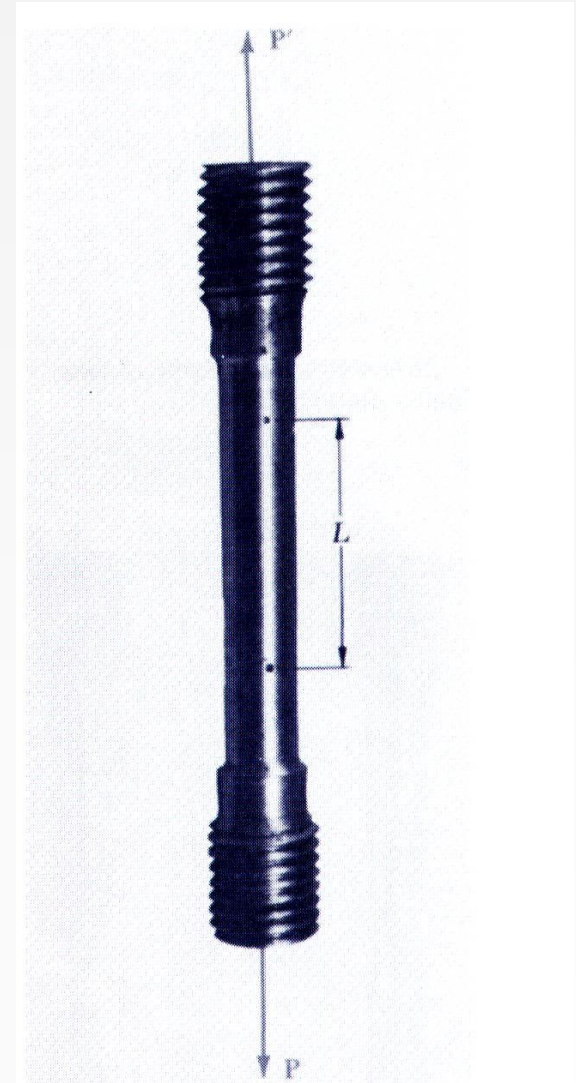


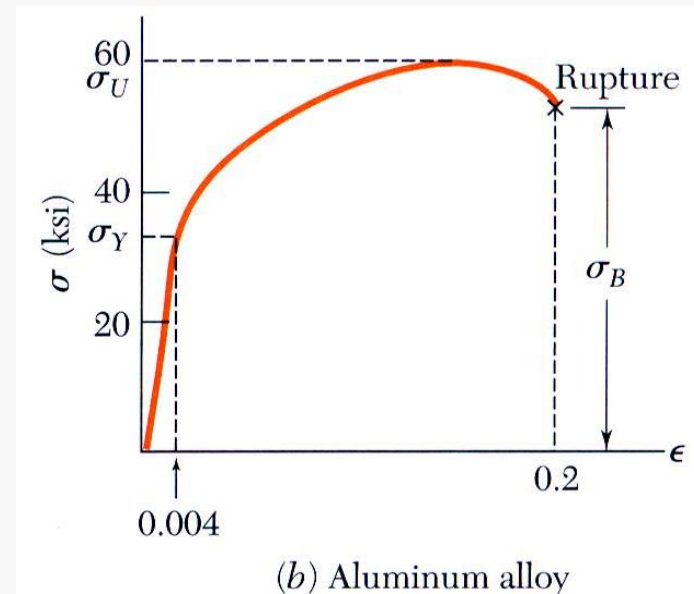
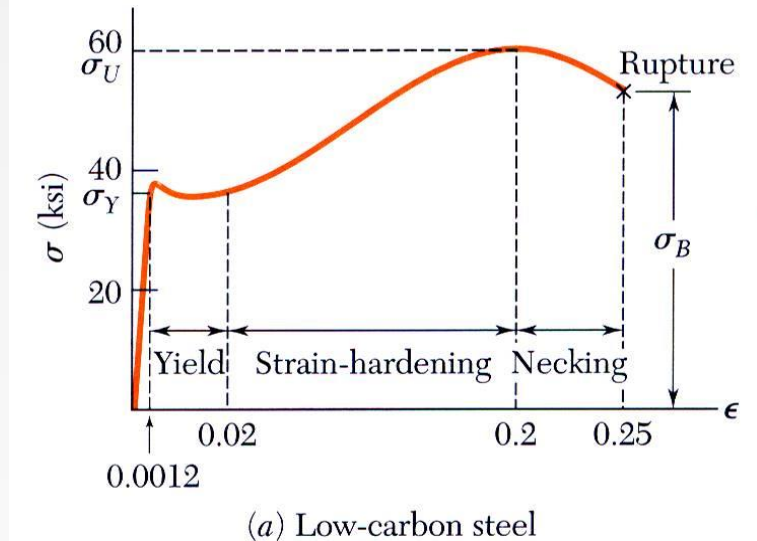
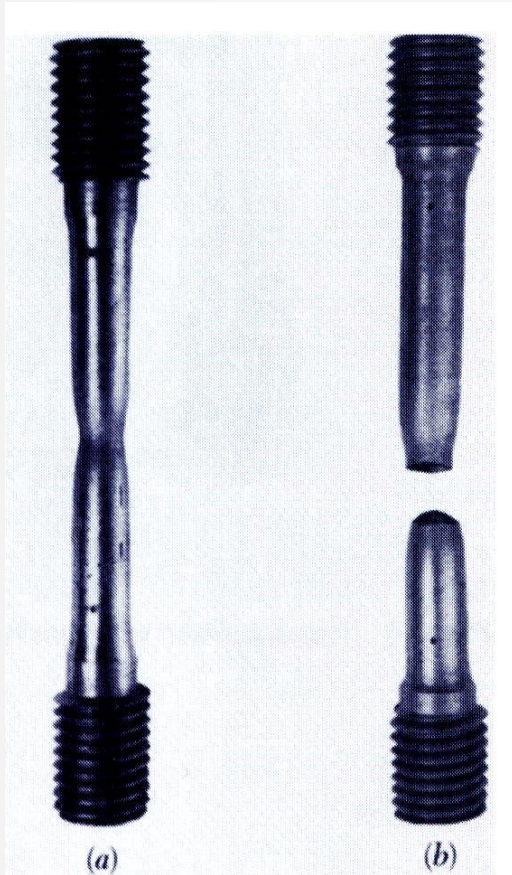
Fig. 2.8 Test specimen with tensile load.



Ensaio de Tração: Diagrama tensão - extensão

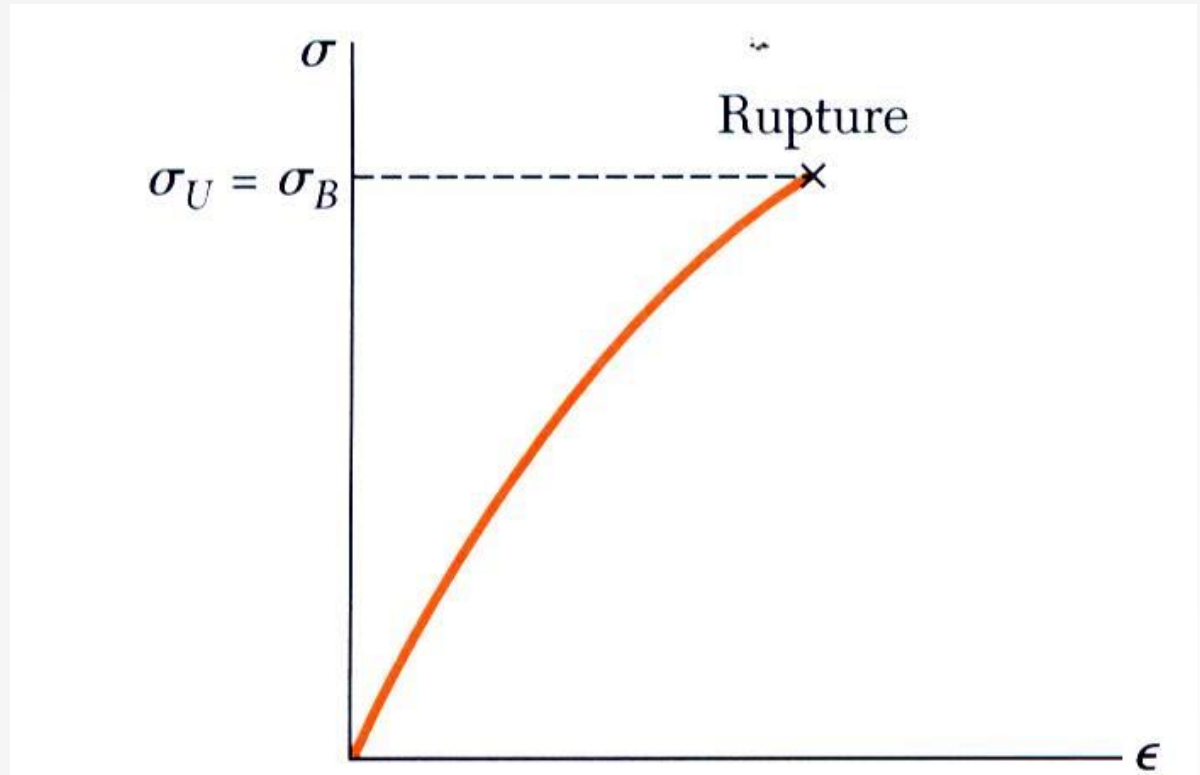
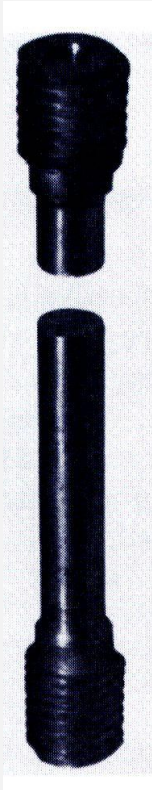
Capítulo 2

Materiais dúcteis





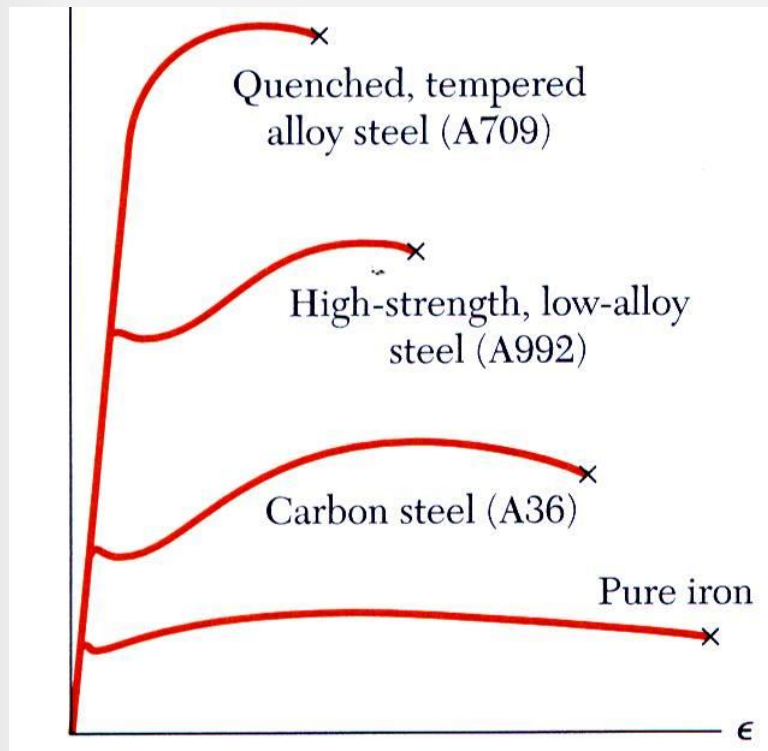
Materiais Frágeis





Lei de Hooke : Módulo de Elasticidade

Capítulo 2



$$\sigma = E \varepsilon$$

E - Módulo de Young ou
Módulo de Elasticidade

Algumas propriedades físicas dos materiais (resistência, ductilidade) podem ser alteradas por tratamentos térmicos, presença de elementos de liga ou processos de fabrico. Contudo o seu Módulo de Elasticidade é o mesmo.

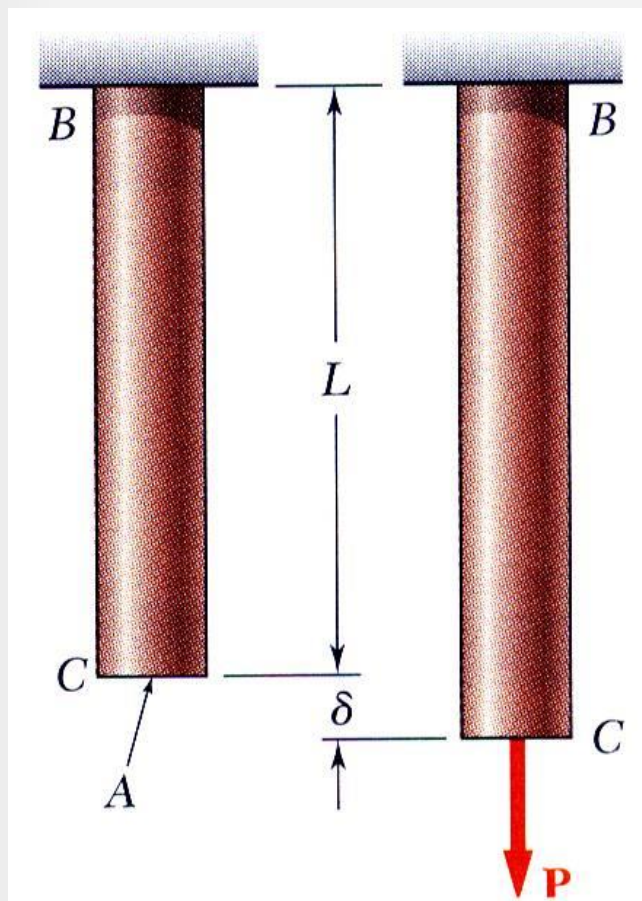
O valor máximo, para o qual o material ainda apresenta comportamento elástico, designa-se por **limite de elasticidade**.

Se a deformação desaparece quando é retirada a carga, então o material tem **comportamento elástico** caso contrario o material sofreu uma **deformação plástica**.



Deformações de barras sujeitas a cargas axiais

Capítulo 2



Da Lei de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

Da definição de extensão:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \Rightarrow \frac{\delta}{L} = \frac{P}{AE} \Rightarrow \delta = \frac{PL}{AE}$$

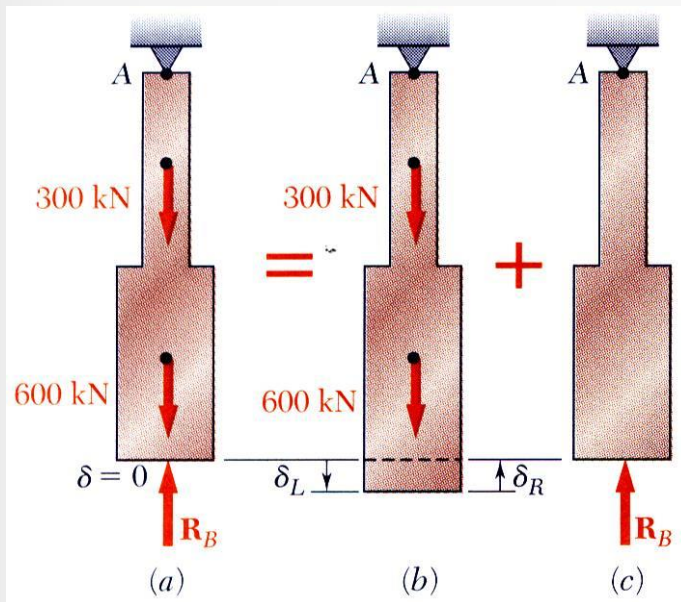
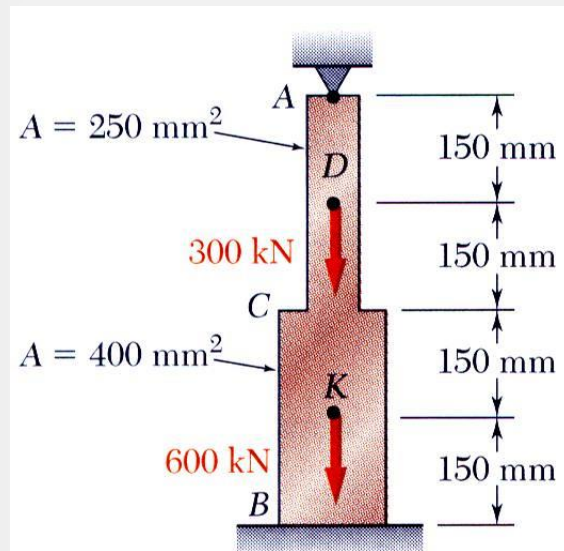
Se existir variação no carregamento, nas secções transversais e nos materiais,

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$



Problemas estaticamente indeterminados

Capítulo 2



Problemas *estaticamente indeterminados* envolvem estruturas cujas reações e esforços internos não são determináveis apenas pela Estática.

Uma estrutura pode ser estaticamente indeterminada se for suportada em mais apoios do que os necessários para manter o equilíbrio.

As reações redundantes devem ser consideradas forças desconhecidas, que juntamente com as outras cargas, devem originar deformações compatíveis.

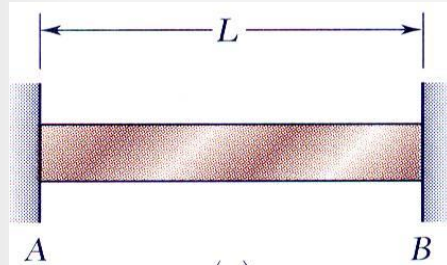
As deformações produzidas pelas cargas aplicadas e as redundantes são calculadas separadamente, e só posteriormente são somadas ou sobrepostas.

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$$

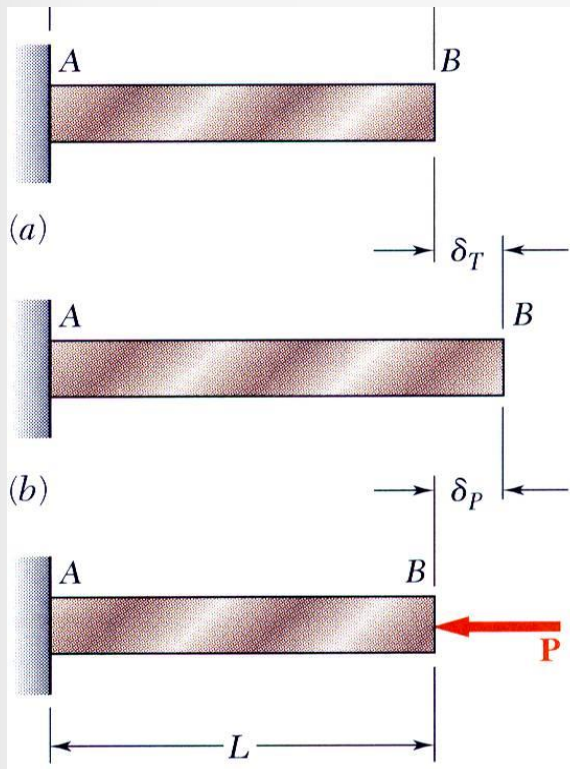


Carregamentos a temperatura variável

Capítulo 2



Variações de temperatura provocam alongamentos ou deformações térmicas. Não existem neste caso tensões relacionadas com a deformação, exceto se o alongamento não é restringido pelos apoios.



Deverá analisar-se separadamente as deformações provocadas pela variação de temperatura e aplicar o princípio da sobreposição.

$$\delta_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

α – Coeficiente de dilatação térmica

Como a deformação total deverá ser nula,

$$\delta = \delta_T + \delta_P = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \Delta T \cdot L + \frac{PL}{AE} = 0$$

$$P = -AE\alpha \cdot \Delta T$$

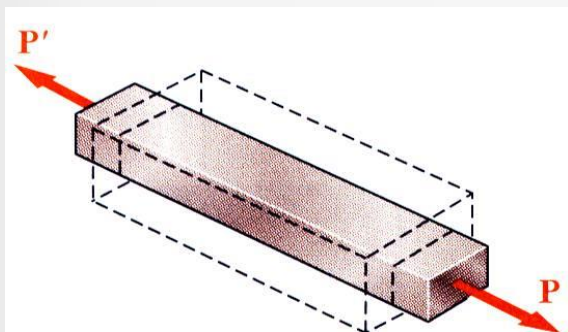
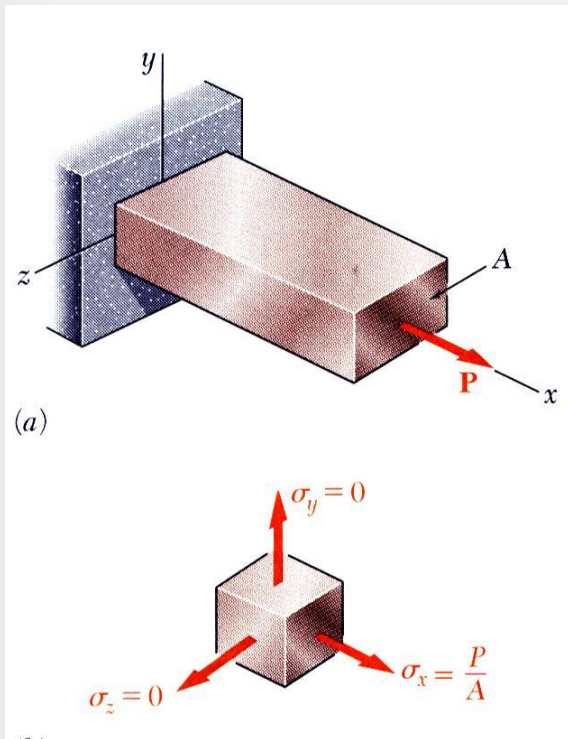
$$\frac{P}{A} = -E\alpha \cdot \Delta T$$



Coeficiente de Poisson

Capítulo 2

Resistência dos Materiais



Uma barra solicitada a um carregamento axial,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

O alongamento na direção x é acompanhado por uma contração nas outras direções. Assumindo que o material é isotrópico (as propriedades não variam com a direção),

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0$$

O **Coeficiente de Poisson** é por definição:

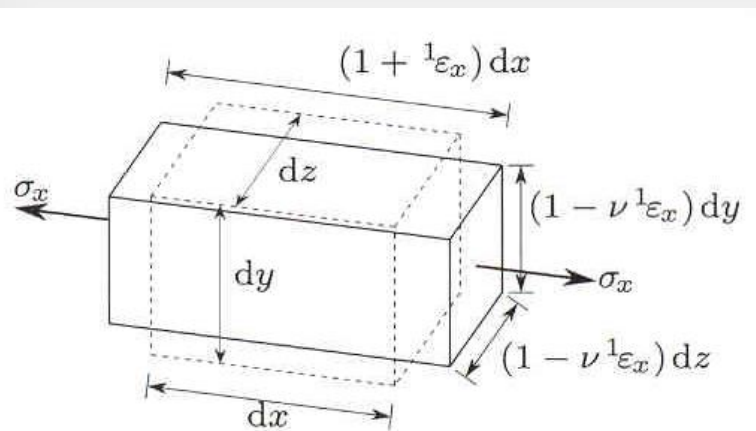
$$v = \left| \frac{\text{deformação transversal}}{\text{deformação axial}} \right| = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

$$v = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$



Lei de Hooke generalizada

Capítulo 2



Materiais Isotrópicos

Para um cubo elementar sujeito a um carregamento multi-axial, a componente da tensão normal resultante pode ser determinado pelo **princípio da sobreposição**.

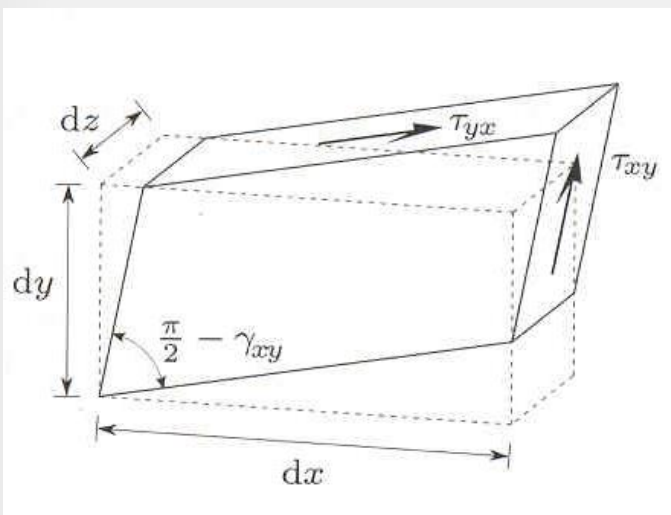
$$\sigma_x \rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_y = -\nu \epsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \\ \epsilon_z = -\nu \epsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \end{cases} \quad \sigma_y \rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_y \\ \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \\ \epsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_y \end{cases} \quad \sigma_z \rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_z \\ \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_z \\ \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_x + \epsilon_x + \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \\ \epsilon_y = \epsilon_y + \epsilon_y + \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \\ \epsilon_z = \epsilon_z + \epsilon_z + \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$



Lei de Hooke generalizada – Tensão de Corte

Capítulo 2



Um cubo elementar sujeito a tensões de corte deforma-se num paralelepípedo oblíquo. A tensão de corte é definida com base no ângulo formado pelas faces sob tensão,

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

γ_{xy} - deformação angular no plano xy

G - Modulo de Elasticidade Transversal ou Modulo de distorção

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{cases}$$

O diagrama da tensão de corte vs. deformação angular é semelhante ao diagrama tensão normal vs. extensão normal, exceto que esses valores são metade dos obtidos para as tensões normais.



Lei de Hooke generalizada – Lei Constitutiva

A **lei constitutiva** de um **material isotrópico** de comportamento elástico linear fica completamente definida com estas duas expressões

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z] \\ \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z] \\ \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + (1-\nu)\varepsilon_z] \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \end{cases}$$

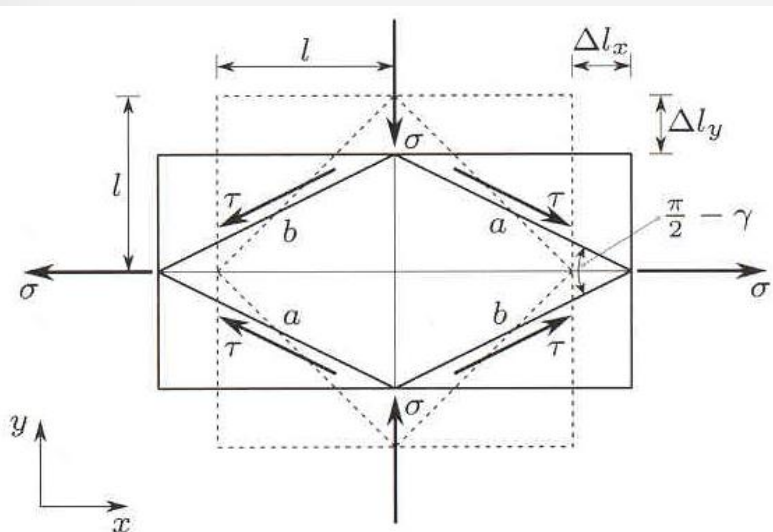


Lei de Hooke generalizada – relação (E, ν , G)

Capítulo 2

Das três constantes elásticas (E, ν , G) apenas duas são independentes.

Estado Bidimensional



$$\frac{l + \Delta l_y}{l + \Delta l_x} = \frac{l - l \frac{1+\nu}{E} \sigma}{l + l \frac{1+\nu}{E} \sigma}.$$

Se considerarmos :

$$\tan \frac{\gamma}{2} \simeq \frac{\gamma}{2} \quad \sigma = \tau$$

podemos concluir :

$$\frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{1+\nu}{E} \tau}{1 + \frac{1+\nu}{E} \tau} \Rightarrow$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{1 + \nu}{E} \tau \Rightarrow \tau = G \gamma$$

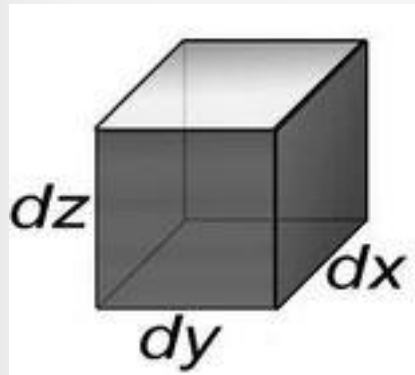
$$\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\gamma}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\gamma}{2}}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



Dilatação volumétrica ou Extensão volumétrica e

Define-se Dilatação volumétrica ou Extensão volumétrica (e) como a variação de volume por unidade de volume inicial. Considera-se um volume de um paralelepípedo retangular definido pelas distâncias infinitesimais dx , dy , dz



Volume Inicial : $V_0 = dx \, dy \, dz$

Volume Final : $V = (dx + \delta x)(dy + \delta y)(dz + \delta z)$

$$V = (dx + \varepsilon_x dx)(dy + \varepsilon_y dy)(dz + \varepsilon_z dz)$$

$$V = (1 + \varepsilon_x)dx (1 + \varepsilon_y) dy (1 + \varepsilon_z) dz$$

$$V = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)V_0$$

$$\varepsilon_x = \frac{\delta x}{dx}$$

Atendendo a que as extensões longitudinais são infinitesimais os produtos destas extensões são infinitésimos de ordem superior, pelo que podem desprezar-se:

$$e = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \cancel{\varepsilon_x \varepsilon_y} + \cancel{\varepsilon_x \varepsilon_z} + \cancel{\varepsilon_y \varepsilon_z} + \cancel{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z}$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$



$$\left. \begin{aligned} e &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ \sigma_m &= \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \end{aligned} \right\} e = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \sigma_m = \frac{\sigma_m}{K}$$

K é a constante de proporcionalidade entre a tensão normal média σ_m e a extensão volumétrica e e designa-se por **Módulo de elasticidade de volume** ou **módulo de compressibilidade cúbica** do material.

$$\sigma_m = K e$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$



Constante de Lamé λ

Capítulo 2

Resistência dos Materiais

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z] \\ \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z] \\ \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + (1-\nu)\varepsilon_z] \end{cases}$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Definindo mais duas constantes θ e λ podemos reescrever a lei constitutiva do material isotrópico.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_x - \nu\theta] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_y - \nu\theta] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_z - \nu\theta] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x \\ \sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y \\ \sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z \end{cases}$$

Destas expressões conclui-se se

$$\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$$

ter-se-á

$$\varepsilon_x > \varepsilon_y > \varepsilon_z$$



Valores limites do coeficiente de Poisson

As quantidades E , G , e K têm que tomar valores positivos, pois para que o trabalho realizado por uma força seja positivo, é necessário que o seu ponto de aplicação se desloque no sentido dessa força.

$$\sigma = E\varepsilon \qquad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \qquad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

$$\begin{cases} G > 0 & \Rightarrow & 1 + \nu > 0 & \Rightarrow & \nu > -1 \\ K > 0 & \Rightarrow & 1 - 2\nu > 0 & \Rightarrow & \nu < 0,5 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq \nu \leq 0,5.$$

Este coeficiente toma valores positivos, pelo que habitualmente se considera,

O valor máximo $\nu = 0,5$ corresponde a um material incompressível, pois conduz a um módulo de compressibilidade cúbica infinito,

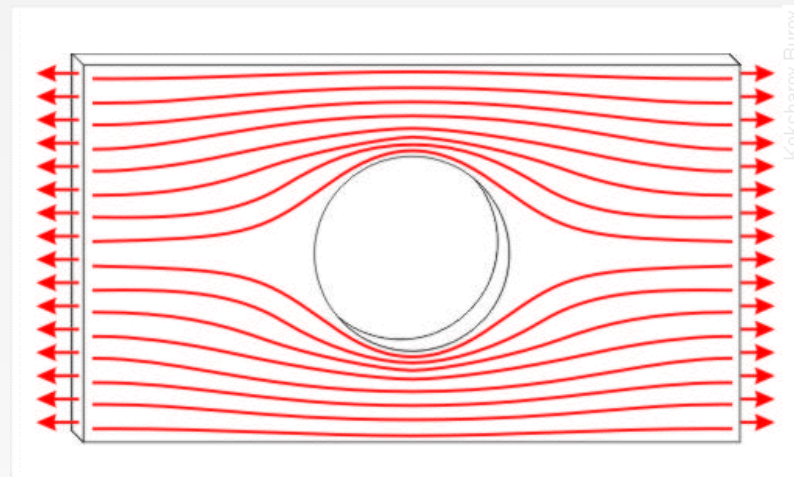
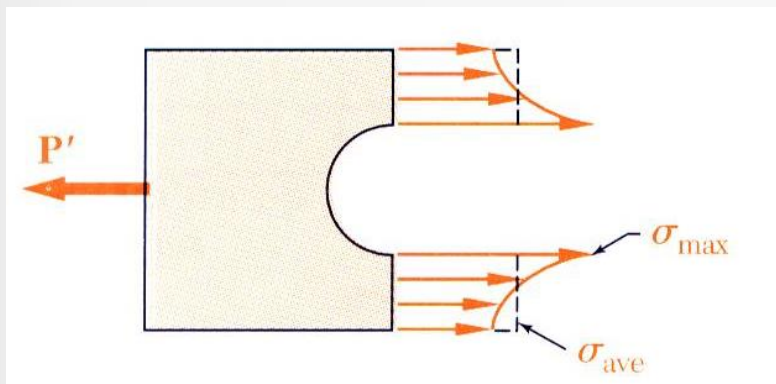
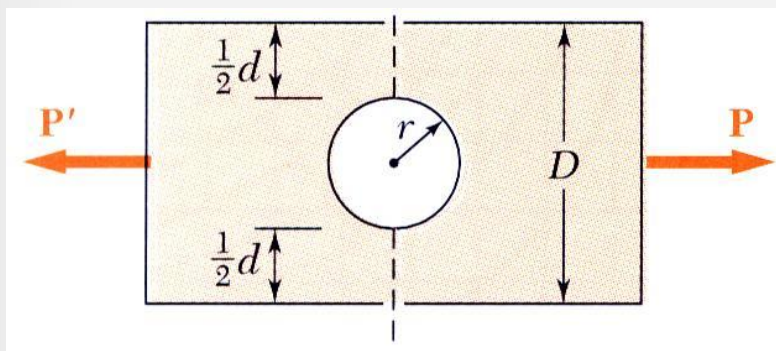
$$0 \leq \nu < 0,5$$

$$1 - 2\nu = 0 \Rightarrow K = \infty$$



Concentração de tensões K_t

Capítulo 2



Descontinuidades, como furos ou variação brusca de secção, podem ocorrer altos valores de tensão nesses pontos de descontinuidade,

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_m}$$

K_t varia com :

- O tipo de carga aplicada
- A geometria da peça

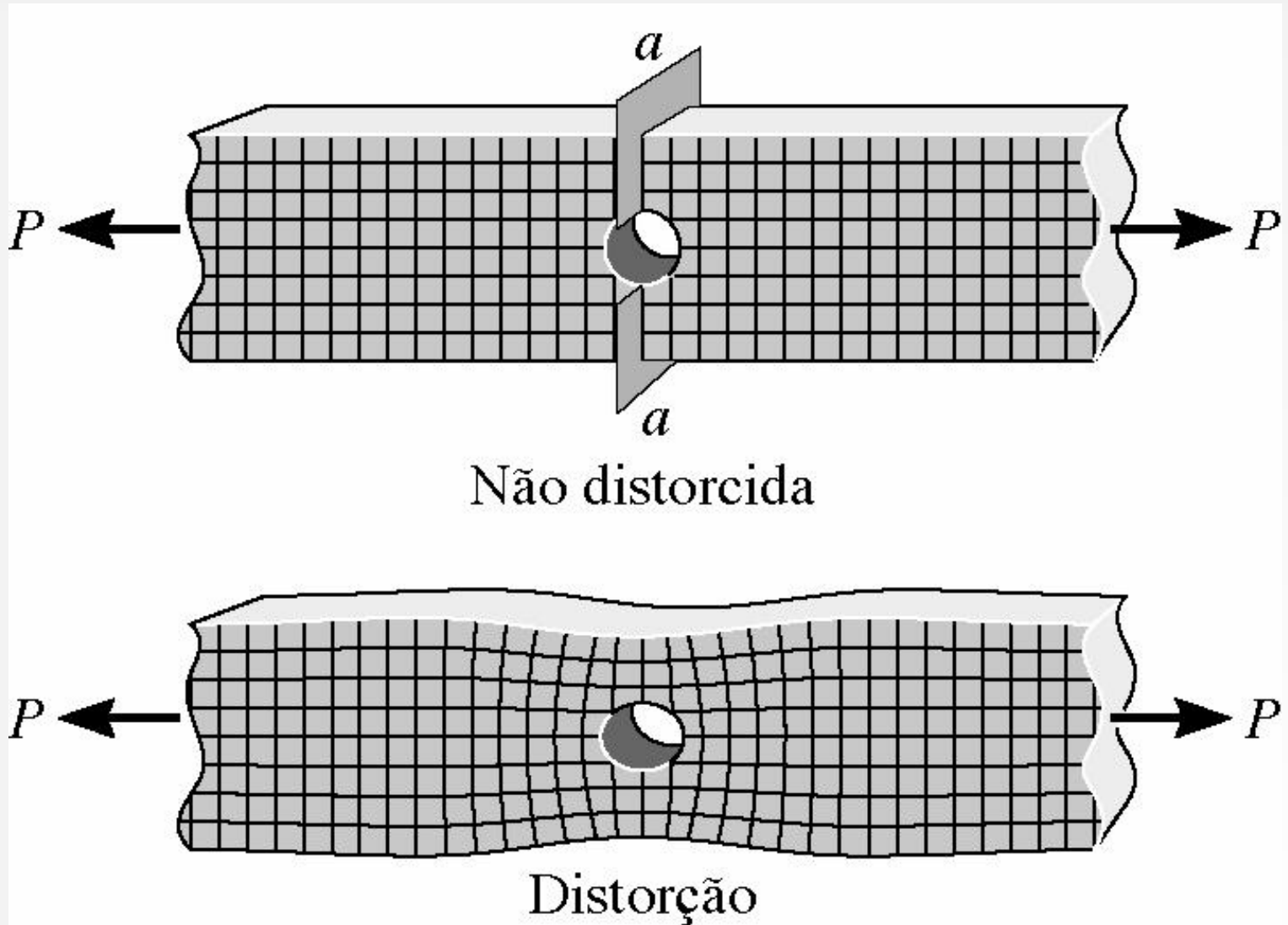
K_t é independente do material da peça



Concentração de tensões K_t - Plata com um furo

Capítulo 2

Resistência dos Materiais





Concentração de tensões K_t - Placa com um furo

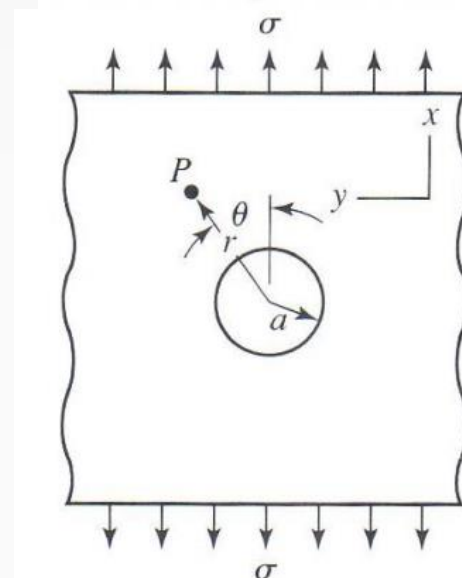
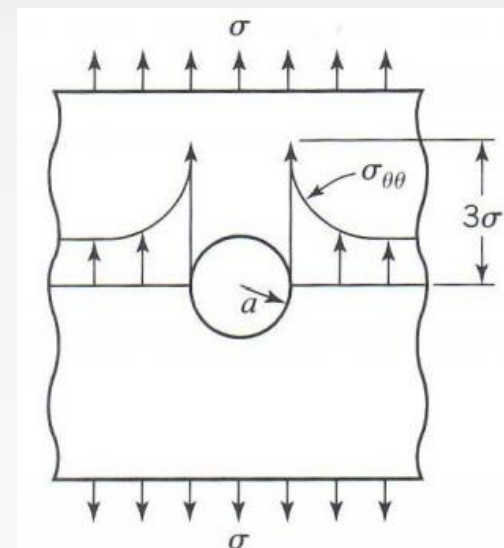
Capítulo 2

Solução analítica para o calculo das tensões

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{3a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 + \frac{3a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

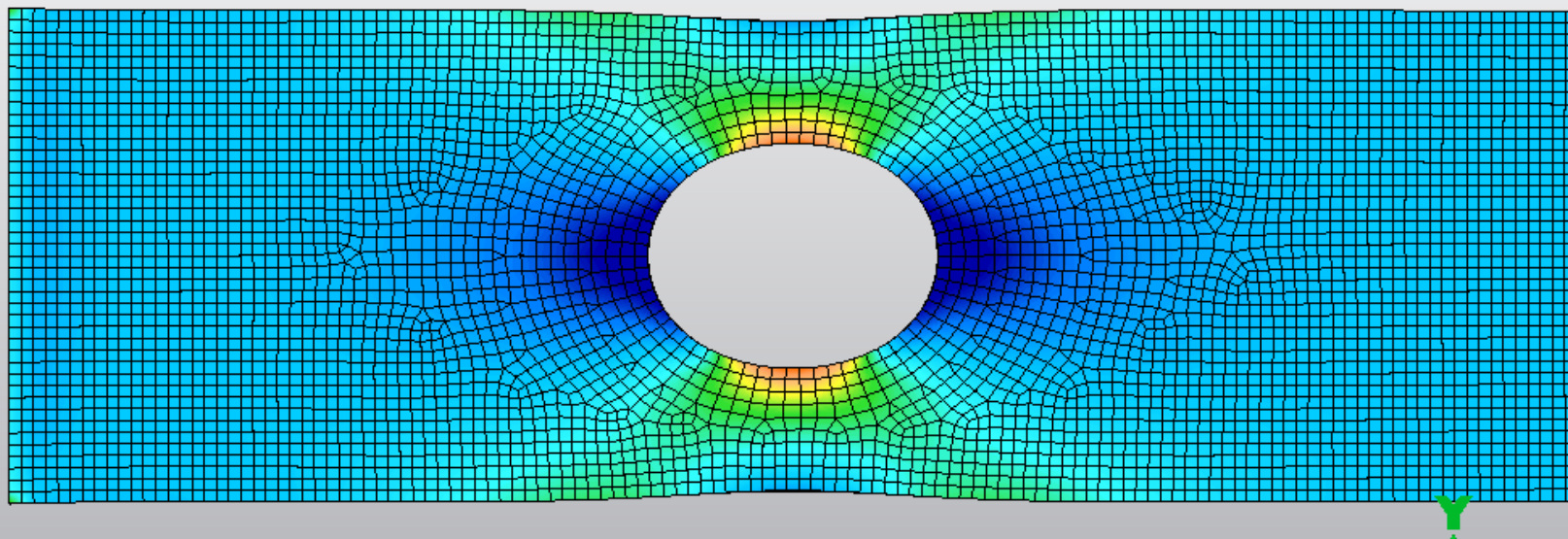




Concentração de tensões K_t - Plata com um furo

Capítulo 2

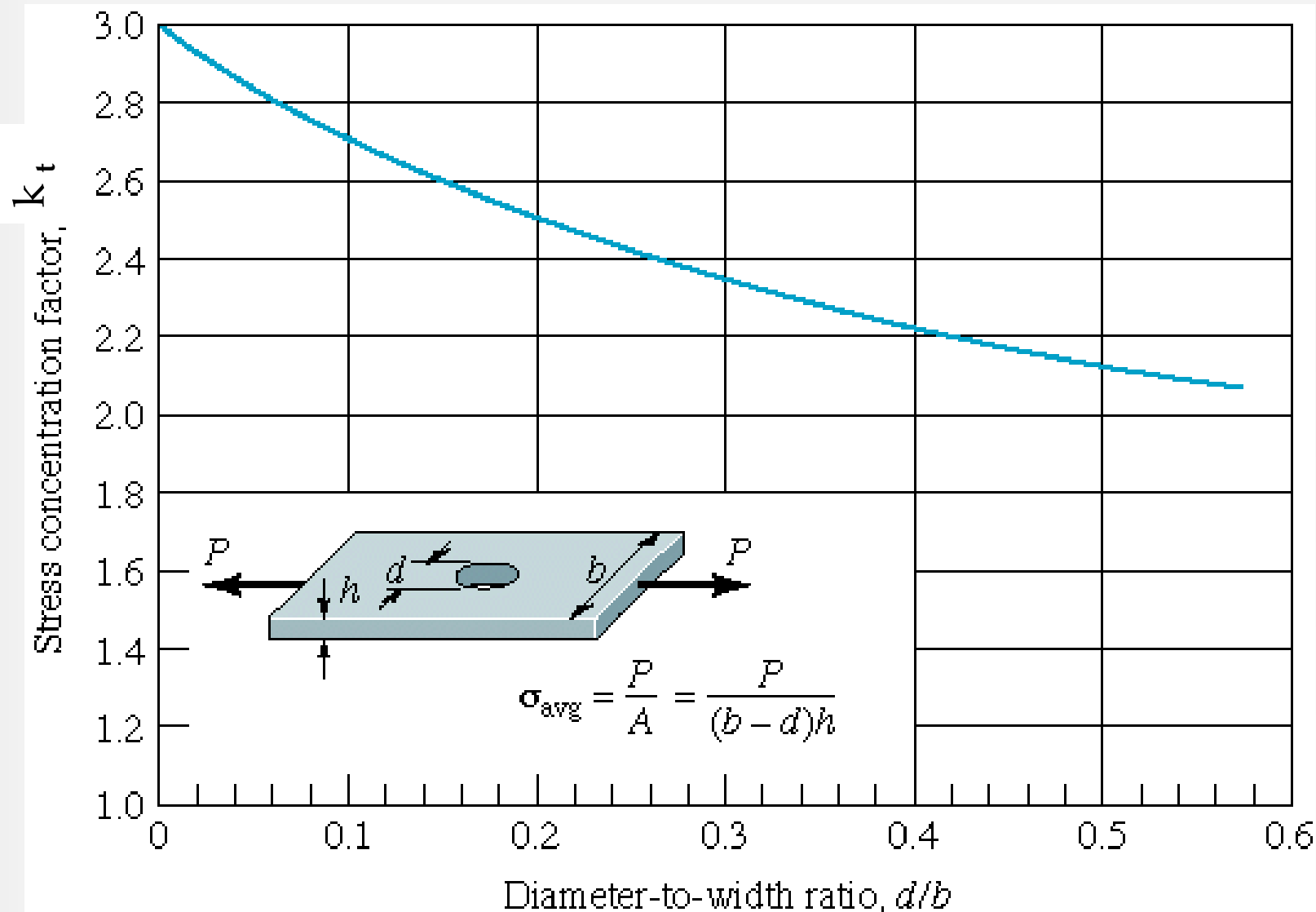
Resultados obtidos por métodos numéricos aproximados





Concentração de tensões K_t

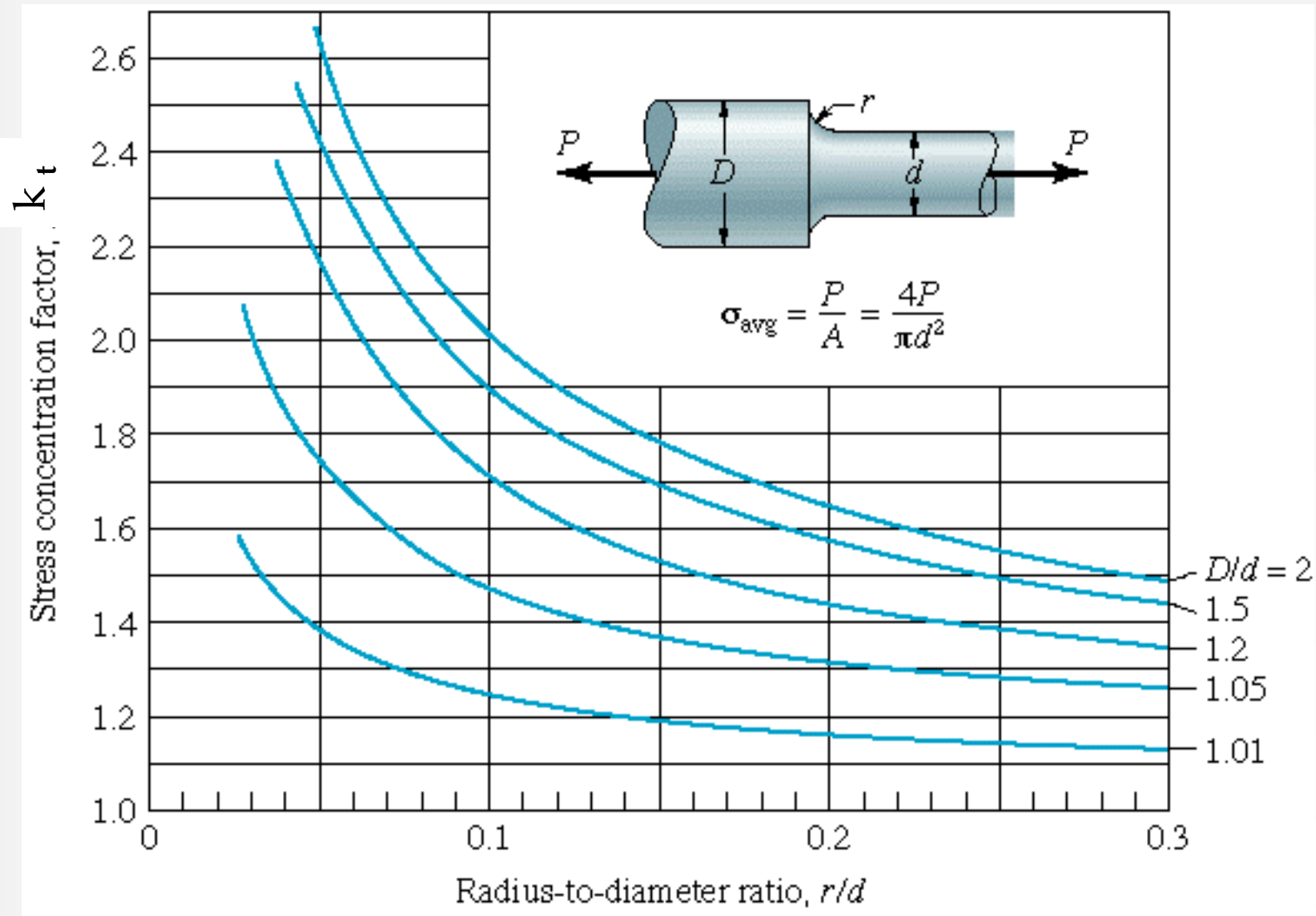
Capítulo 2





Concentração de tensões K_t

Capítulo 2

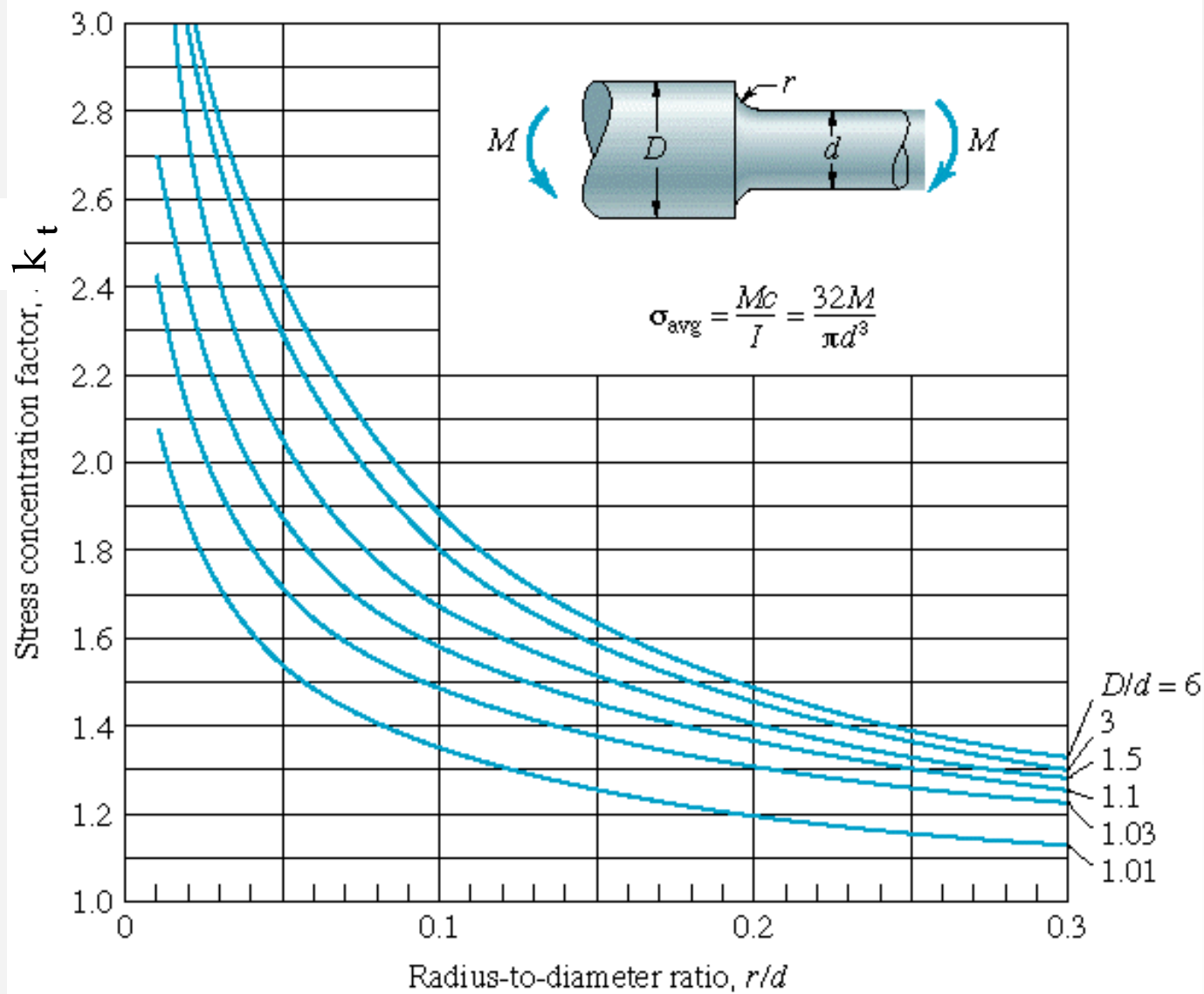




Concentração de tensões K_t

Capítulo 2

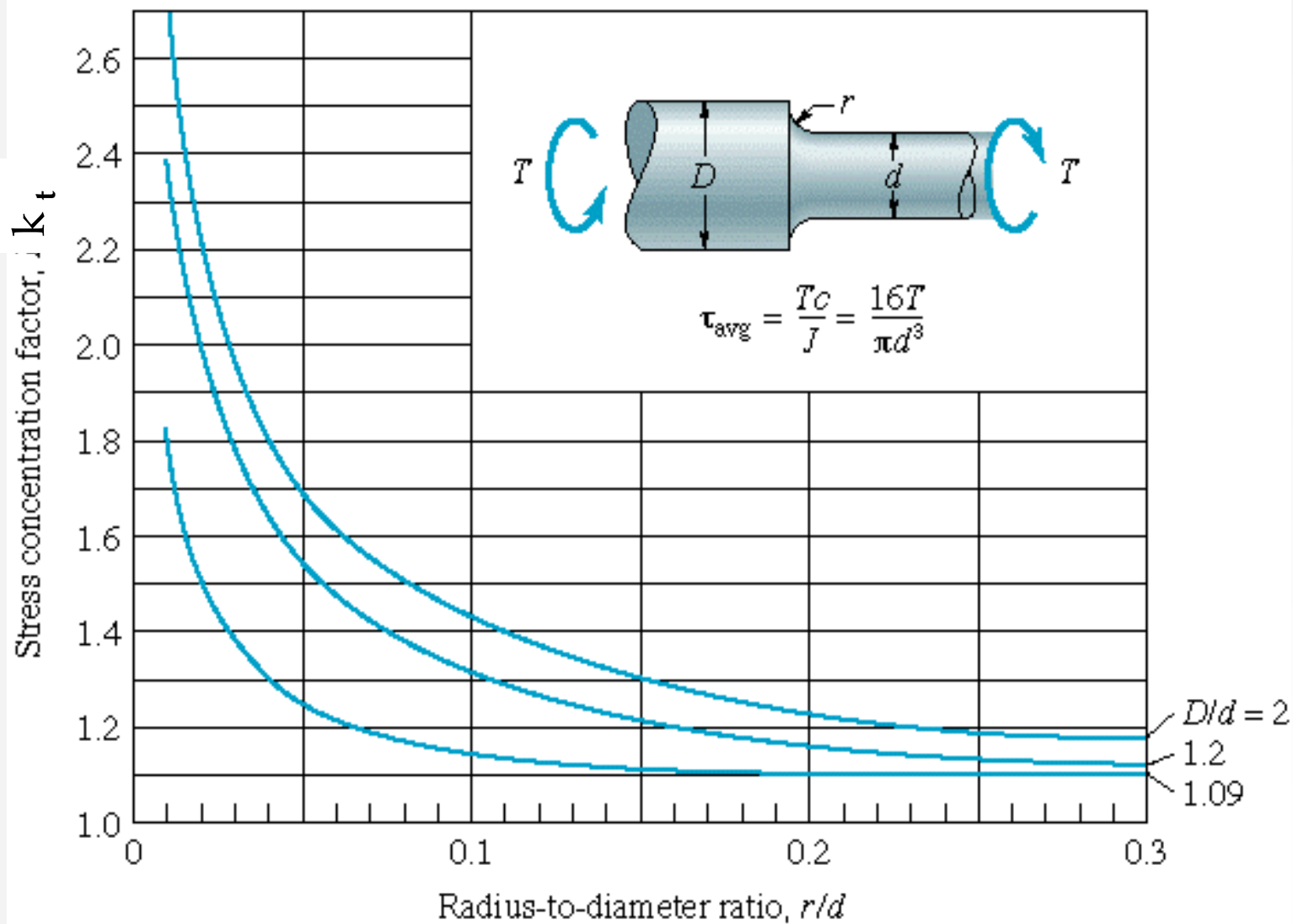
Resistência dos Materiais





Concentração de tensões K_t

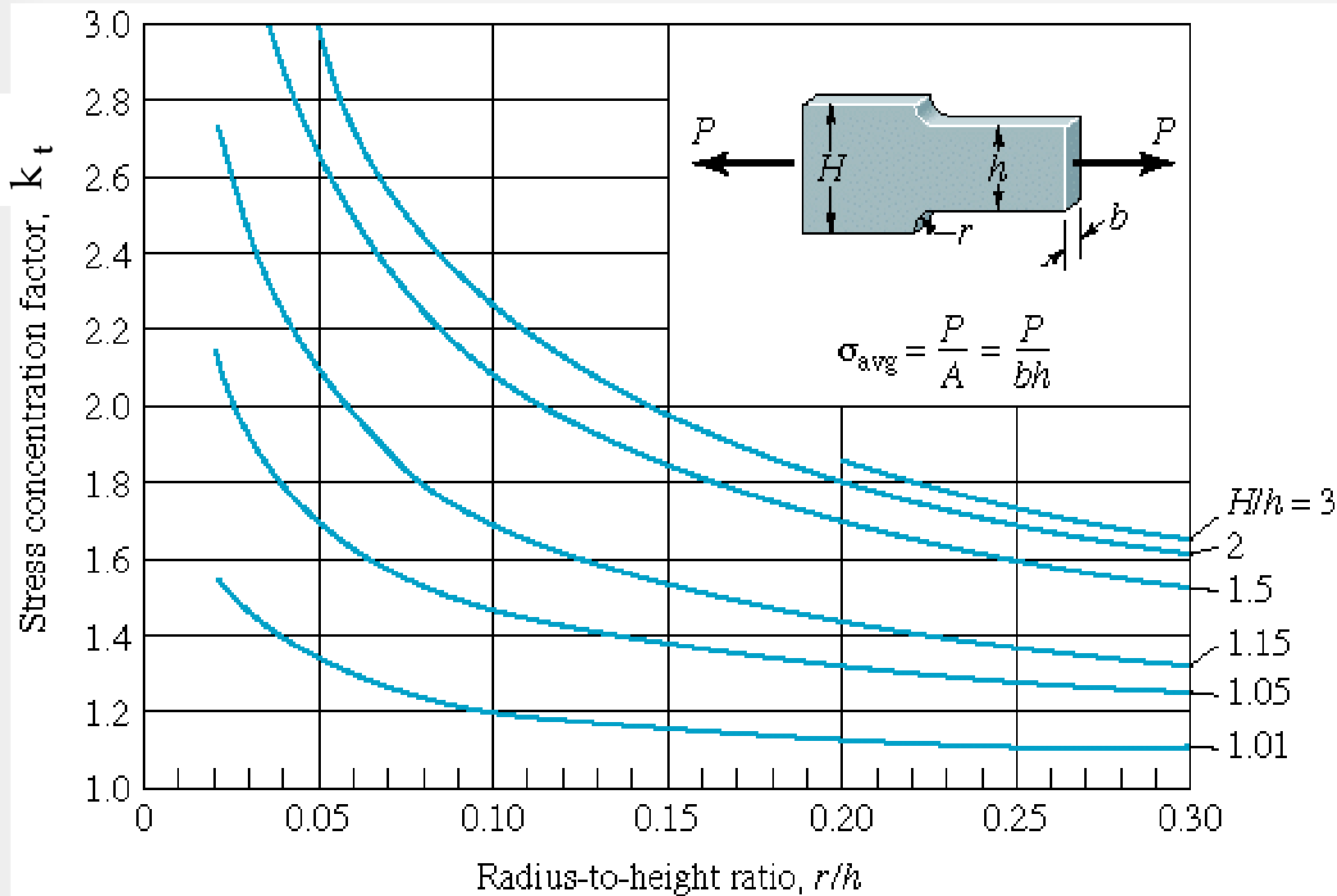
Capítulo 2





Concentração de tensões K_t

Capítulo 2

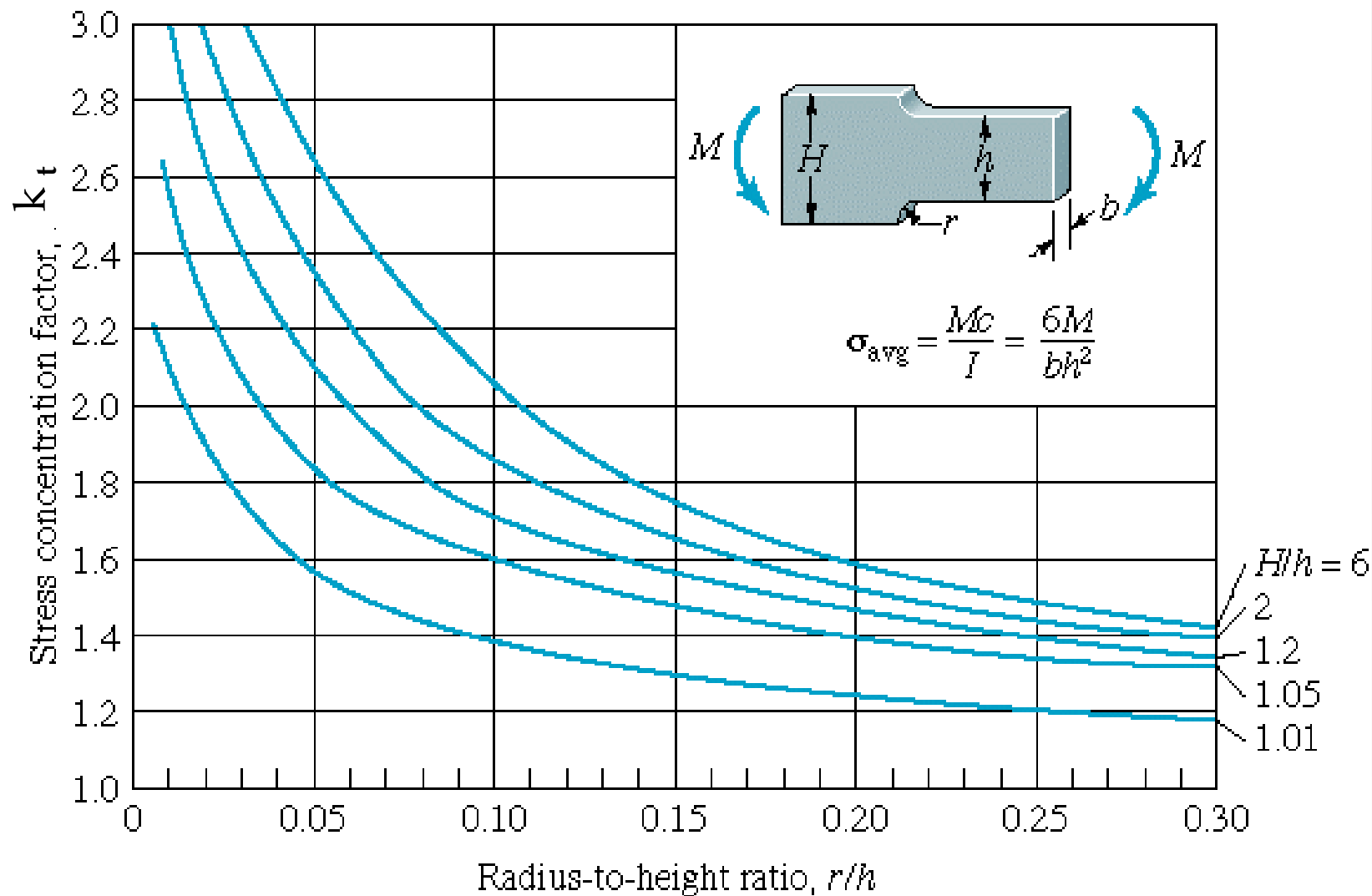




Concentração de tensões K_t

Capítulo 2

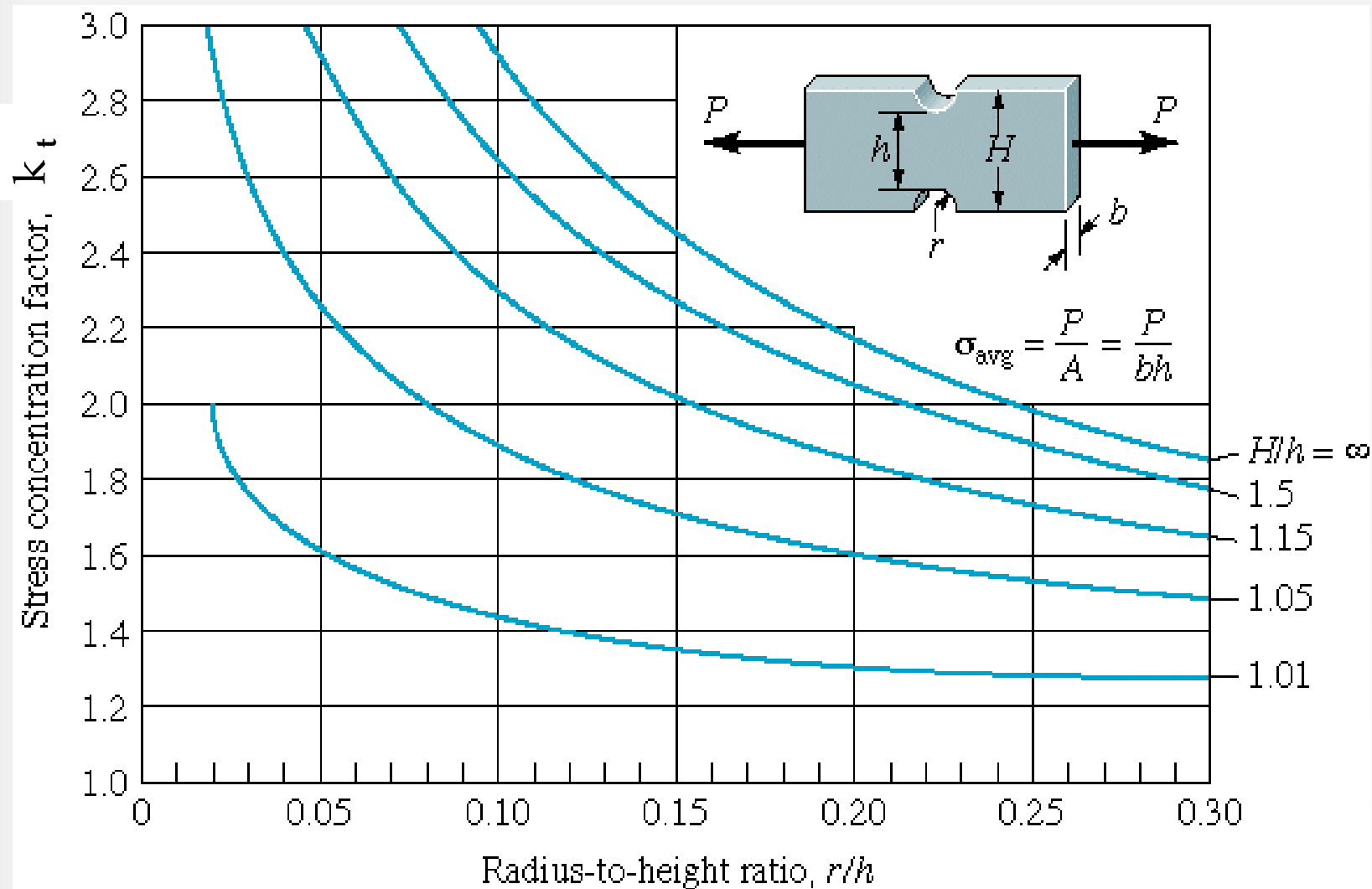
Resistência dos Materiais





Concentração de tensões K_t

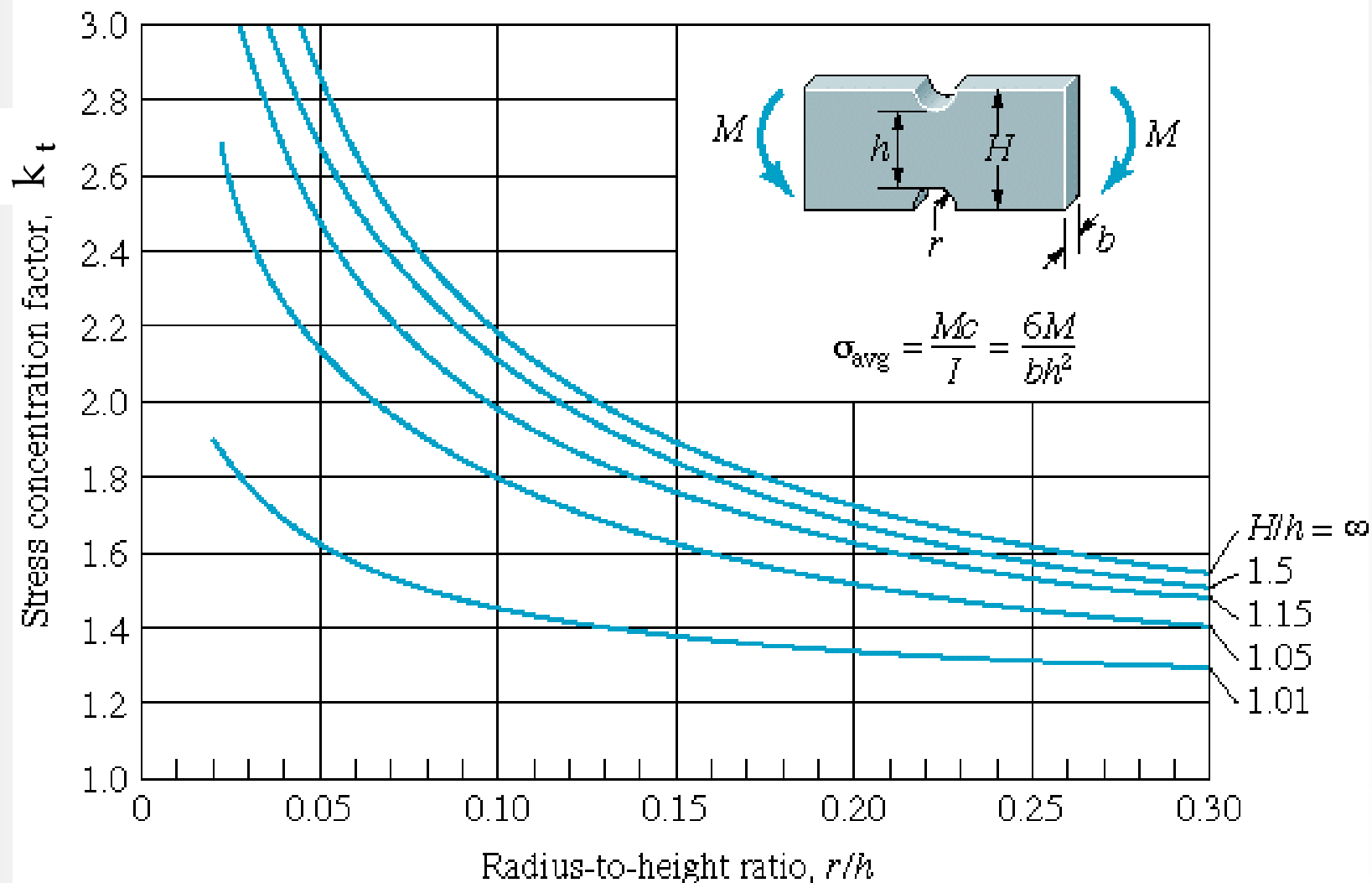
Capítulo 2





Concentração de tensões K_t

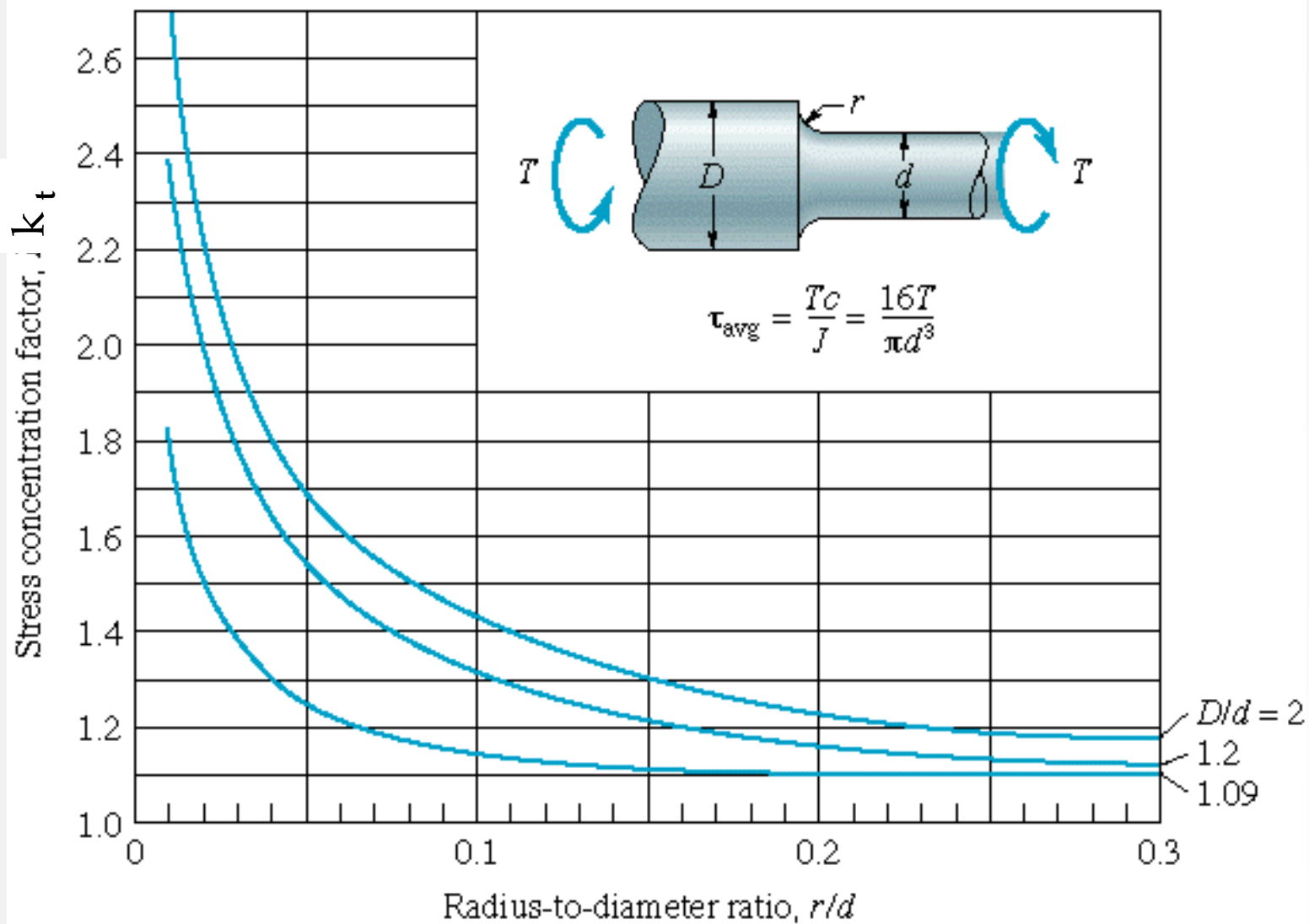
Capítulo 2





Concentração de tensões K_t

Capítulo 2

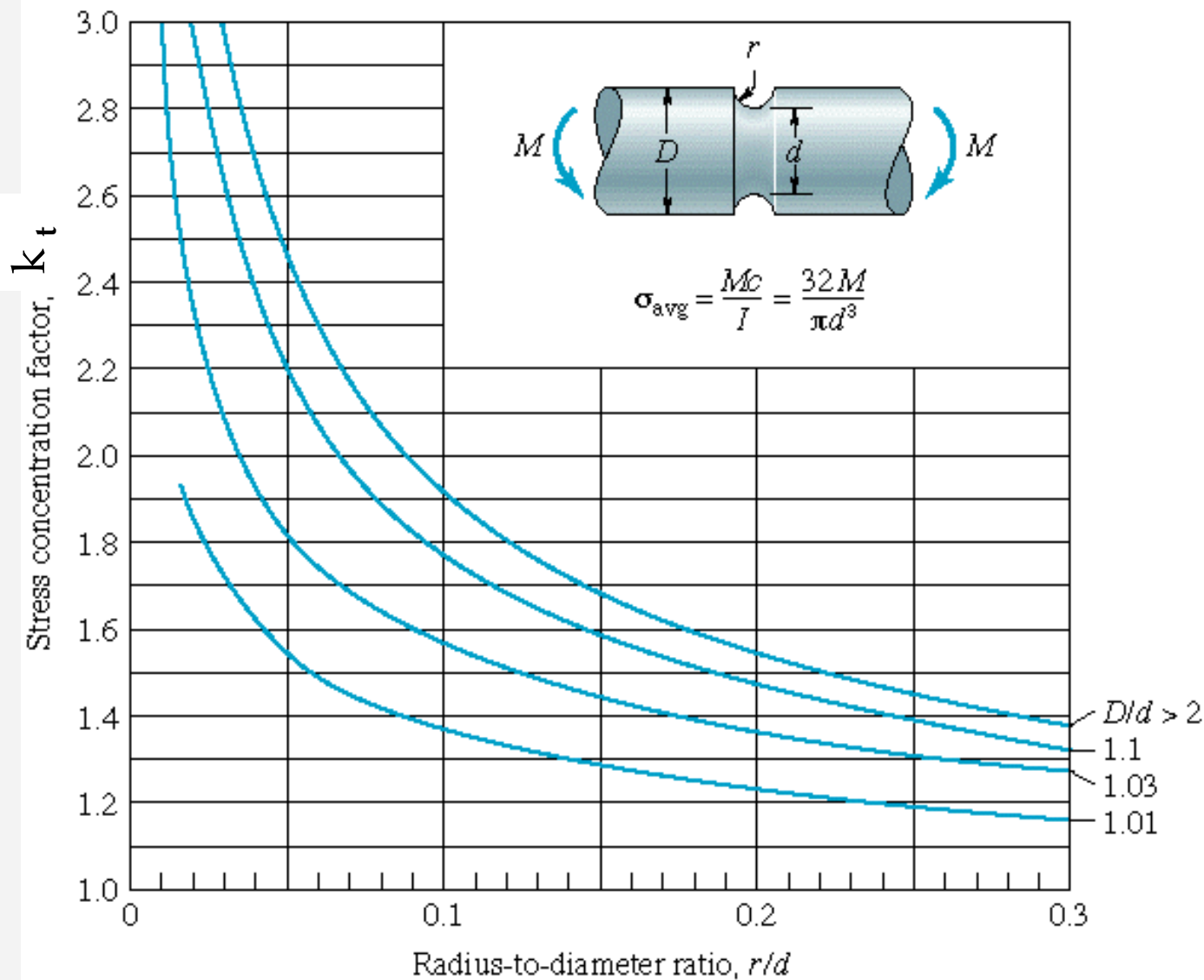




Concentração de tensões K_t

Capítulo 2

Resistência dos Materiais





Concentração de tensões K_t

Capítulo 2

