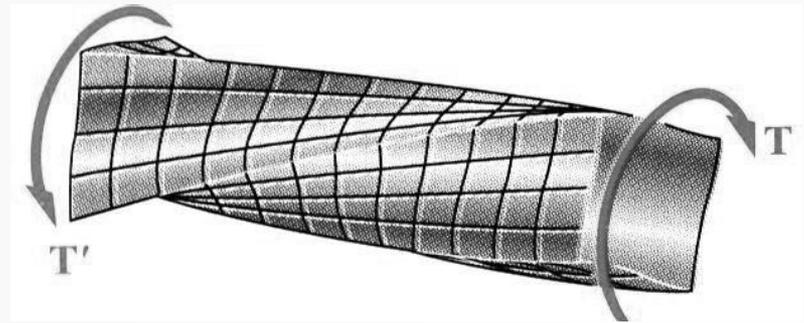
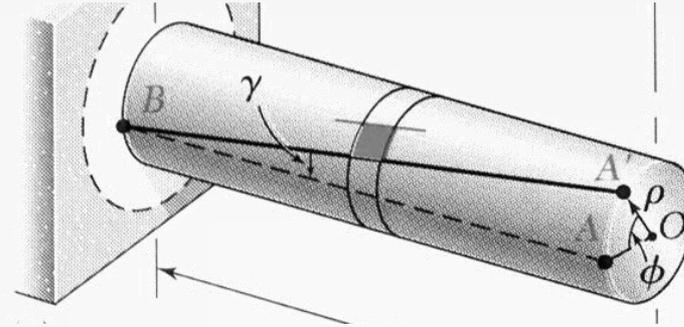
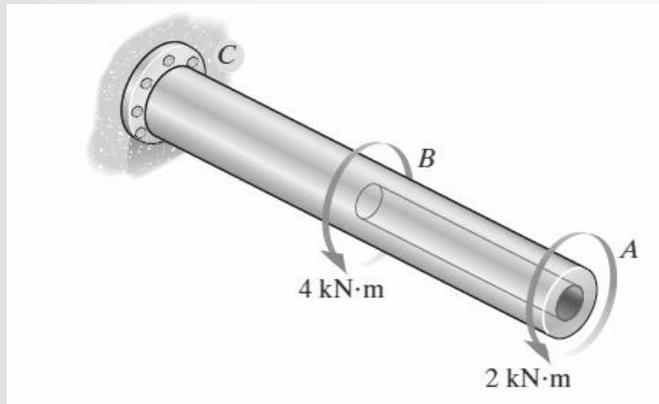


# Resistência dos Materiais

## Capítulo 3

### - Torção



Acetatos baseados nos livros:

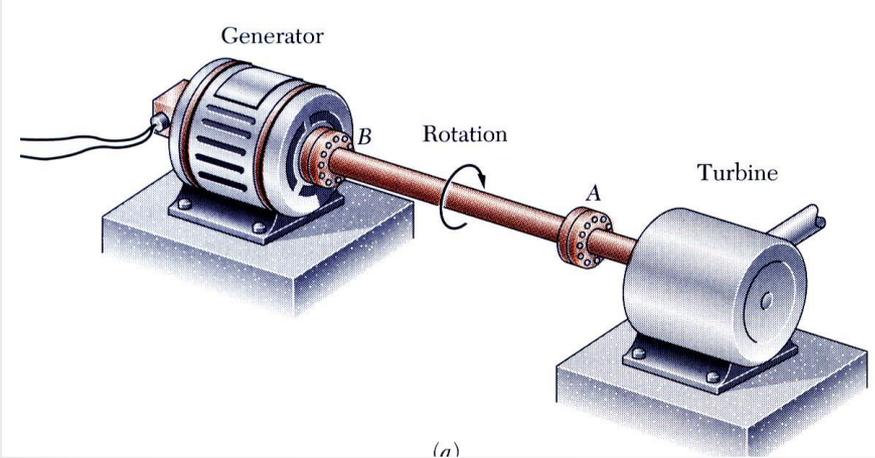
- Mechanics of Materials - Beer & Jonhson
- Mecânica e Resistência dos Materiais – V. Dias da Silva



- Tensões de corte nas secções circulares
- Rotação das secções
- Torção em veios circulares
- Torção em veios de transmissão
- Torção em barras rectangulares
- Torção em perfis de parede finas aberto e fechado

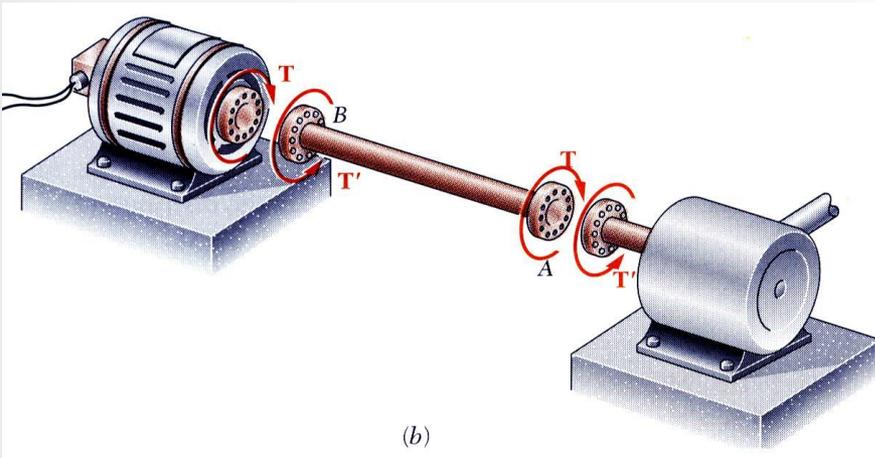


# Momentos de torção aplicados a eixos



Estudo das tensões e deformações originadas em eixos submetidos a momentos de torção.

A turbina exerce um momento de torção  $T$  no eixo.

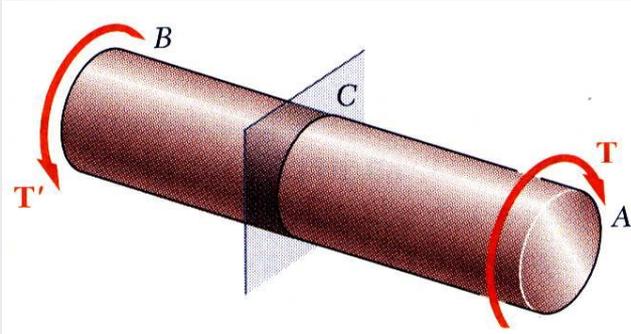


O eixo transmite o momento ao gerador .

O gerador reage e exerce um momento de igual a intensidade e sentido contrário.



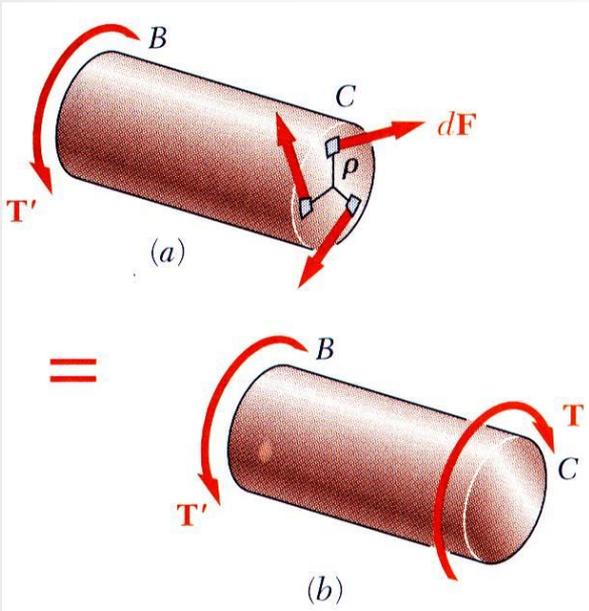
# Análise preliminar das tensões de um eixo



Para ocorrer equilíbrio o conjunto de forças elementares deve produzir um momento de torção interno  $T$  igual e contrário a  $T'$ .

$$T = \int \rho dF = \int \rho \tau dA$$

Embora sejam conhecidas as tensões de corte originadas pelo momento aplicado ao eixo, o mesmo não acontece com a distribuição de tensões.



A distribuição das tensões de corte é estaticamente indeterminável – é necessário considerar as deformações no eixo.

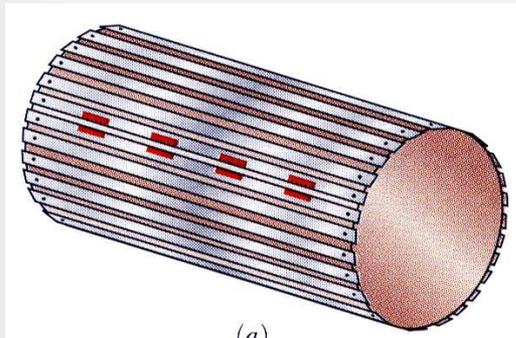
Contrariamente à distribuição de tensões normais provocadas por carregamento axial, a distribuição das tensões de corte originadas por momentos de torção não pode ser considerada uniforme.



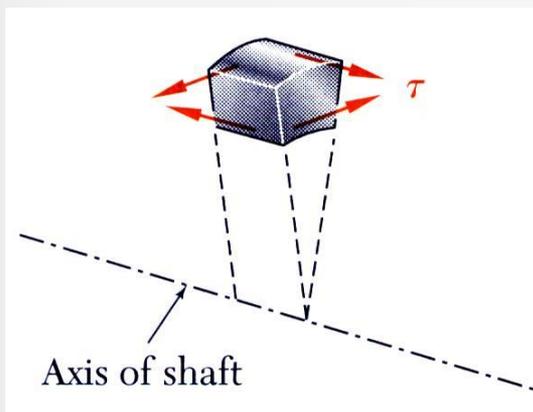
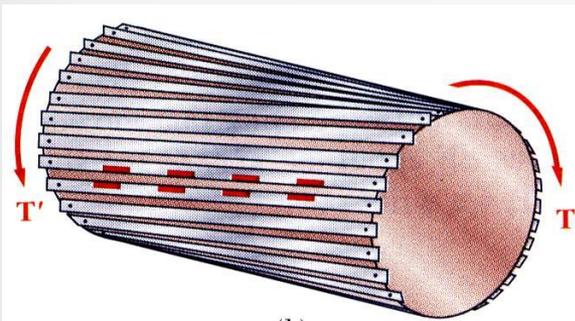
# Componentes da tensão de corte

Capítulo 3

Resistência dos Materiais



(a)



O momento de torção aplicado origina tensão de corte nas faces perpendiculares ao eixo.

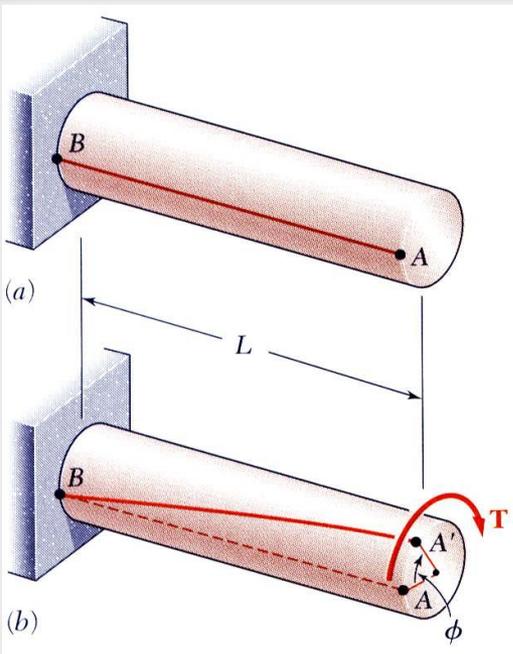
A satisfação das condições de equilíbrio exige a existência de tensões de corte nas duas faces formadas pelos planos que passam pelo eixo da barra circular.

A existência das componentes da tensão de corte pode ser demonstrada pela análise de um eixo constituído de lâminas finas.

Quando aplicados nas extremidades do eixo momentos de torção de igual intensidade e sentido oposto, as lâminas escorregam uma relativamente à outra.



# Deformações nos eixos



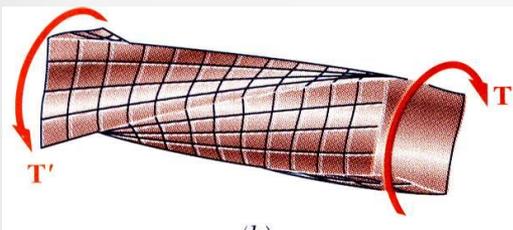
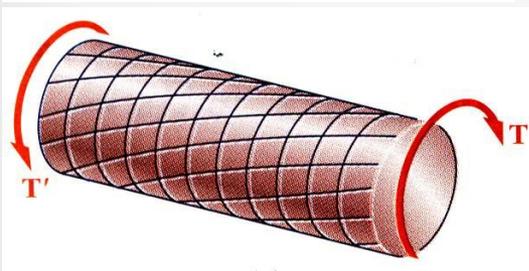
A experiência mostra que:

O **ângulo de rotação** do eixo,  $\phi$ , é proporcional ao **momento aplicado**,  $T$ , e ao **comprimento do eixo**,  $L$ .

$$\phi \propto T \quad \text{e} \quad \phi \propto L$$

**Hipóteses:**

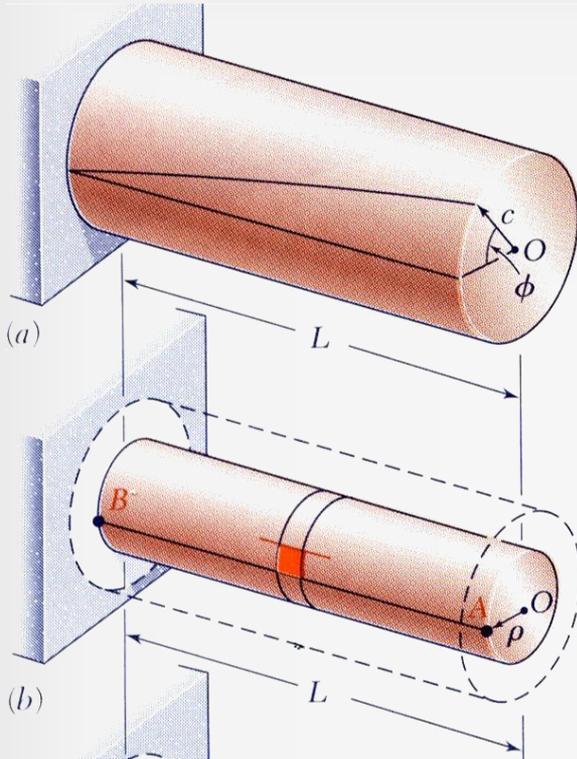
1. As secções do eixo permanecem planas.
2. As secções de eixos circulares maciços ou ocos conservam a sua forma porque o eixo circular é axissimétrico.



As secções de barras não circulares (não axissimétricas) perdem a sua forma inicial quando submetidas à torção.



# Deformações angular



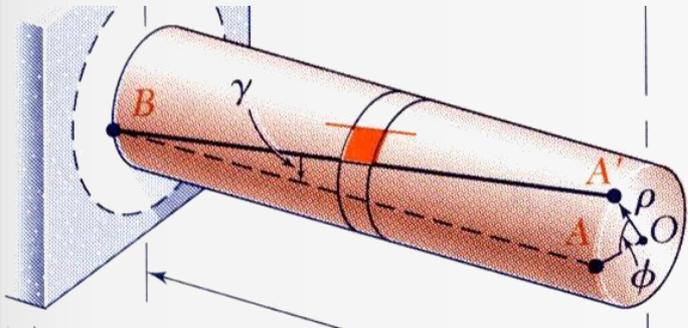
Considere uma secção interna de um eixo. Assim que um momento de torção é aplicado, os seus elementos internos deformam-se num losango.

Desde que as extremidades do elemento permaneçam planas, temos:

$$L\gamma = \rho\phi \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

A deformação de corte é proporcional à distância ao centro do eixo e ao ângulo de rotação.

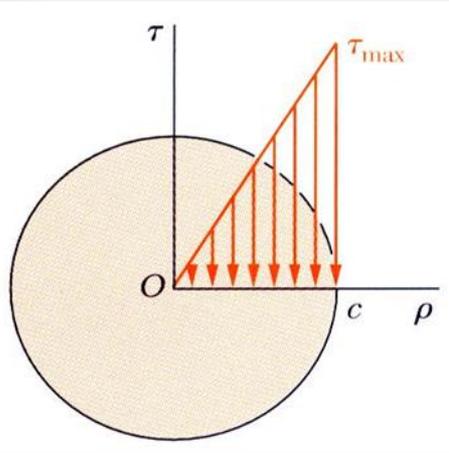


$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L} \Rightarrow$$

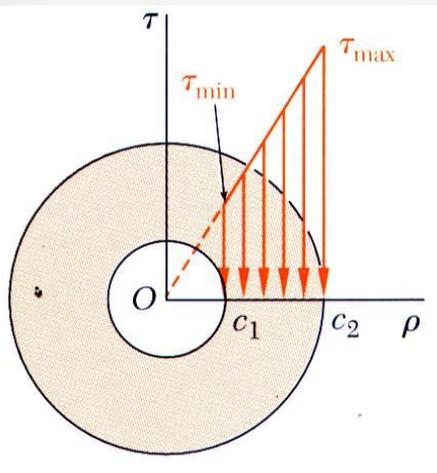
$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{max}$$



# Tensões no regime elástico



$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$



$$J = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4)$$

Multiplique a equação anterior pelo módulo de elasticidade transversal,

$$\tau = G\gamma \quad \Rightarrow \quad G\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{max} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\rho}{c} \tau_{max}$$

A tensão de corte varia linearmente com a posição  $\rho$ .

Recordar que a soma dos momentos das forças elementares que actuam na secção do eixo circular, deve ser igual à intensidade do momento  $T$  aplicado ao eixo, ( $J$  – momento polar de inércia)

$$T = \int \rho \tau dA = \frac{\tau_{max}}{c} \int \rho^2 dA = \frac{\tau_{max}}{c} J$$

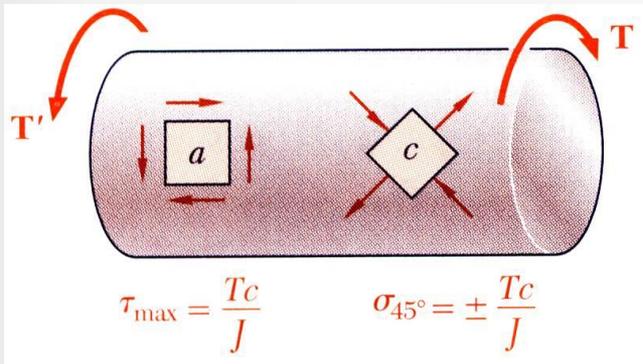
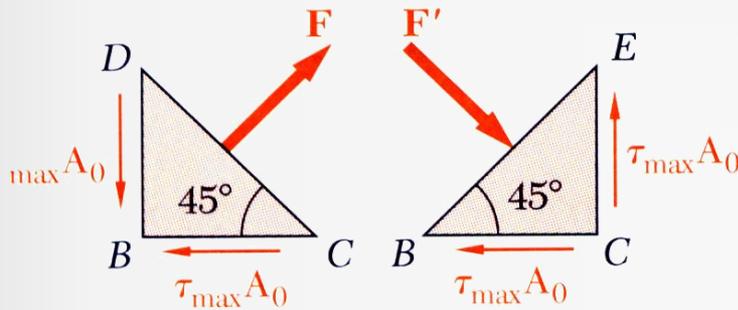
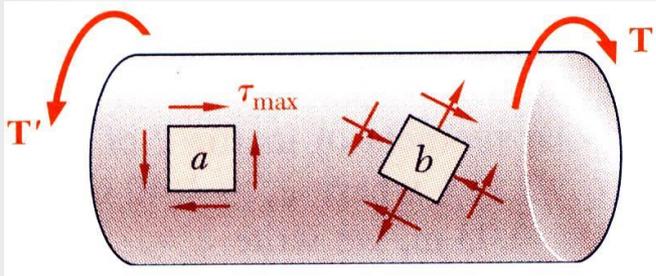
As equações são conhecidas como as fórmulas da torção em regime elástico,

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$



# Tensões normais



Os elementos com as faces paralelas ou perpendiculares ao eixo da barra circular, só estão sujeitos a tensões de corte. Sob as mesmas condições de carregamento podem ser obtidas tensões normais ou de corte, ou combinações das duas, dependendo da orientação.

Considerando um elemento que forma um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo da barra,

$$F = 2(\tau_{max}A_0)\cos(45^\circ) = \tau_{max}A_0\sqrt{2}$$

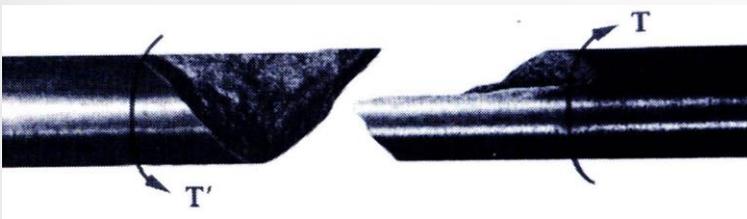
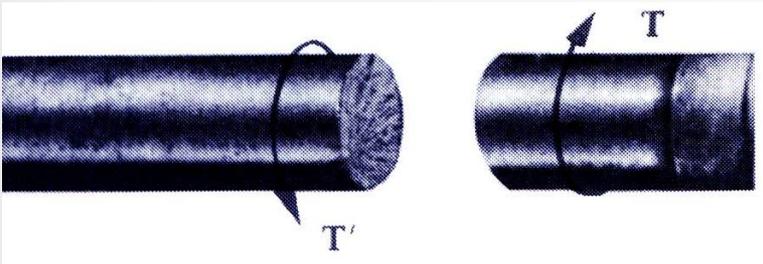
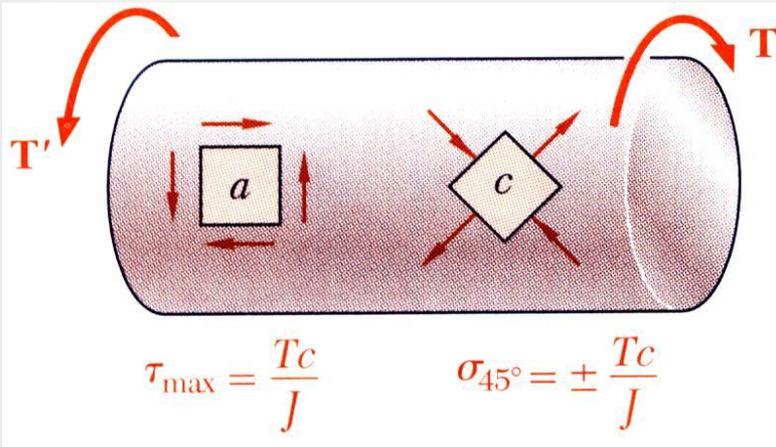
$$\sigma_{45^\circ} = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{max}A_0\sqrt{2}}{A_0\sqrt{2}} = \tau_{max}$$

Elemento *a* está sob corte puro.

Elemento *c* está sujeito a tensões de tracção em duas das suas faces e a tensão de compressão nas outras duas.



# Modos de falha na torção



Os **matérias dúcteis** geralmente rompem por **corte**.

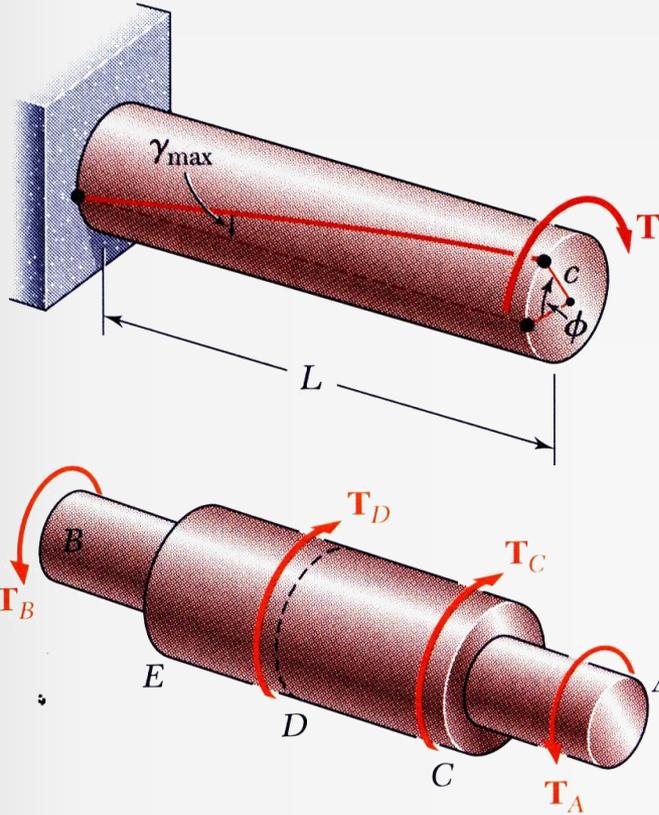
Os **materiais frágeis** são menos resistentes à **tracção** que ao corte.

Quando submetidos à torção, os materiais dúcteis rompem num plano perpendicular ao eixo longitudinal.

Quando submetidos à torção, os matérias frágeis rompem em superfícies que formam  $45^\circ$  com o eixo longitudinal.



# Ângulo de torção no regime elástico



Recordar que o ângulo de torção e a deformação de corte máxima estão relacionadas no regime elástico, a deformação de corte e a tensão estão relacionadas.

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} \quad \gamma_{max} = \frac{c\phi}{L} \quad \tau_{max} = G\gamma_{max}$$

Expressando a equação em ordem à deformação de corte e resolvendo em função do ângulo de torção,

$$\Rightarrow \frac{Tc}{J} = G \frac{c\phi}{L} \Rightarrow$$

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

Se o momento de torção ou as dimensões do eixo forem modificadas, o ângulo de torção será obtido se somarmos algebricamente os ângulos de torção de cada componente.

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$



# Projeto de veios de transmissão

As principais especificações a serem consideradas no projecto de eixos de transmissão são:

- Potência
- Velocidade de rotação do eixo

Momento de torção no eixo para uma determinada potência e velocidade,

$$P = \omega T = 2\pi f T \Rightarrow T = \frac{P}{2\pi f}$$

O projectista deverá escolher materiais e dimensões adequadas, de modo a que a máxima tensão de corte não exceda a tensão admissível.

Determinar a secção do veio para qual não se excede a tensão máxima admissível de corte,

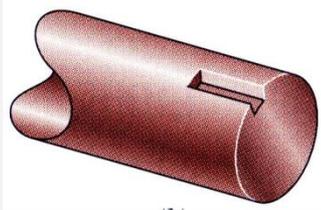
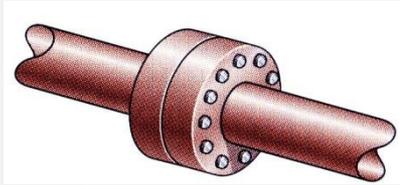
$$\text{Veios maciços: } \frac{Tc}{\frac{\pi}{2}c^4} \leq \tau_{adm} \Rightarrow \frac{2T}{\pi c^3} \leq \tau_{adm}$$

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} \leq \tau_{adm}$$

$$\text{Veios ocos: } \frac{Tc_2}{\frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4)} \leq \tau_{adm} \Rightarrow \frac{2Tc_2}{\pi(c_2^4 - c_1^4)} \leq \tau_{adm}$$



# Concentração de tensões

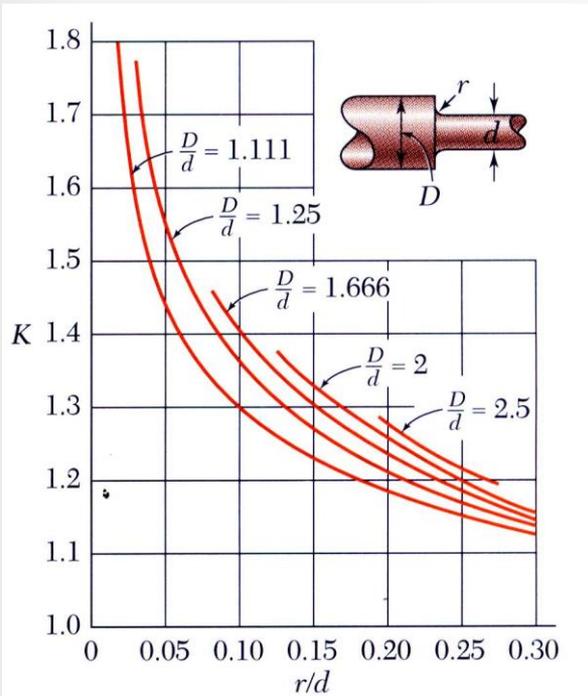


A tensão de corte máxima assume que a secção transversal circular é uniforme e os momentos torsores são aplicados aos eixos através de placas rígidas nas extremidades.

Porem ao utilizarem-se acoplamentos ou flanges, ou engrenagens ligadas ao eixo por chavetas colocadas dentro de rasgos feitos nas superfícies de contacto, irão existir descontinuidades que originam concentração de tensões.

Factores de concentração de tensões determinados experimentalmente ou numericamente são aplicados da seguinte forma:

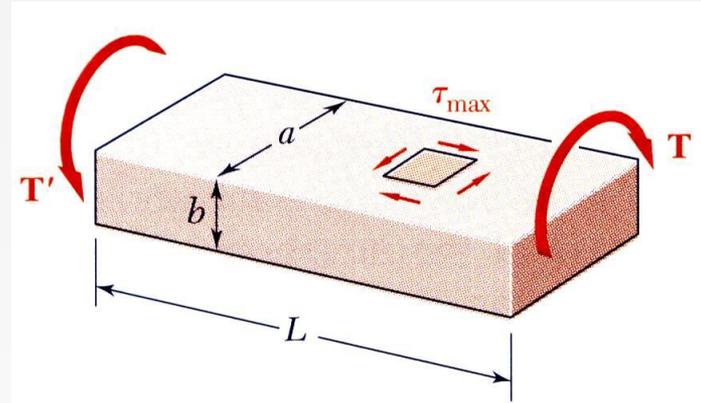
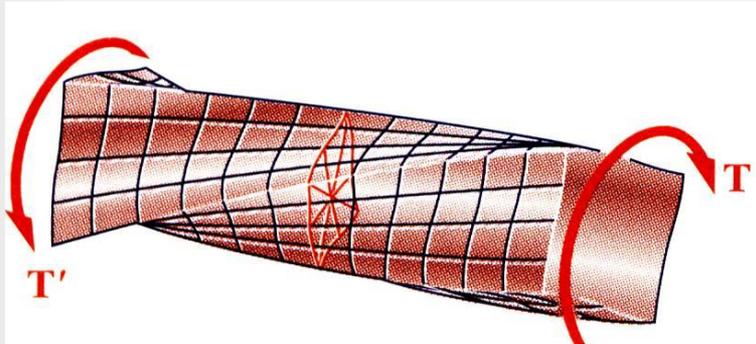
$$\tau_{max} = K \frac{Tc}{J}$$





# Torção - barras retangulares

As secções transversais de eixos não circulares não permanecem planos após a deformação e a distribuição de **tensão não varia linearmente**.



| $a/b$    | $c_1$ | $c_2$  |
|----------|-------|--------|
| 1.0      | 0.208 | 0.1406 |
| 1.2      | 0.219 | 0.1661 |
| 1.5      | 0.231 | 0.1958 |
| 2.0      | 0.246 | 0.229  |
| 2.5      | 0.258 | 0.249  |
| 3.0      | 0.267 | 0.263  |
| 4.0      | 0.282 | 0.281  |
| 5.0      | 0.291 | 0.291  |
| 10.0     | 0.312 | 0.312  |
| $\infty$ | 0.333 | 0.333  |

Para uma **secção rectangular**, a **tensão de corte máxima** esta localizada a **meio da aresta maior**.

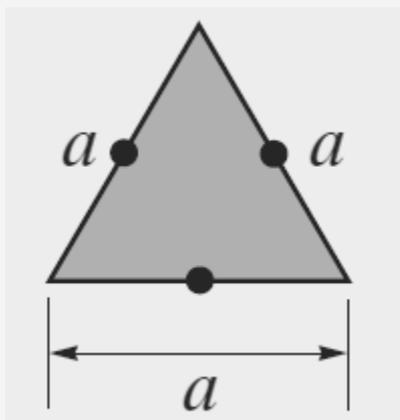
$$\tau_{max} = \frac{T}{c_1 ab^2}$$

$$\phi = \frac{TL}{c_2 ab^3 G}$$



# Torção – barras triangulares e elípticas

As secções transversais de eixos não circulares não permanecem planos após a deformação e a distribuição de **tensão não varia linearmente**.

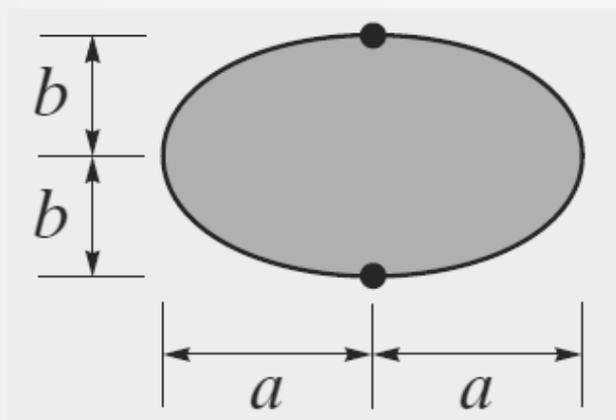


## Secção triangular

$$\tau_{max} = \frac{20 T}{a^3}$$

$$\phi = \frac{46 TL}{a^3 G}$$

## Secção elíptica

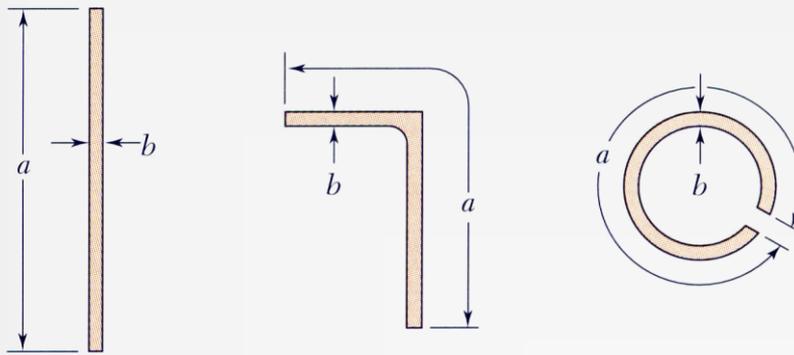


$$\tau_{max} = \frac{2T}{\pi ab^2}$$

$$\phi = \frac{(a^2 + b^2)TL}{\pi a^3 b^3 G}$$



# Torção - perfis de parede finas abertos



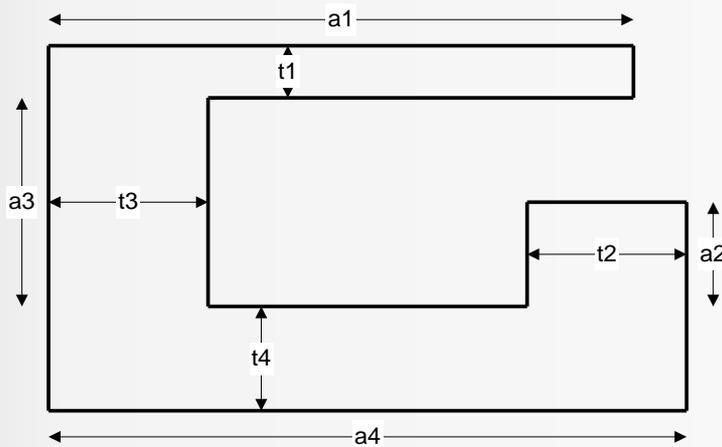
Para barras de paredes finas de espessura constante, a tensão máxima de corte é igual à tensão máxima de uma barra rectangular com valores de  $\frac{a}{b}$  elevados.

barra rectangular

$$c_1 = c_2 = 0.3333 = \frac{1}{3}$$

$$\tau_{max} = \frac{3T}{ab^2}$$

$$\phi = \frac{3TL}{ab^3G}$$

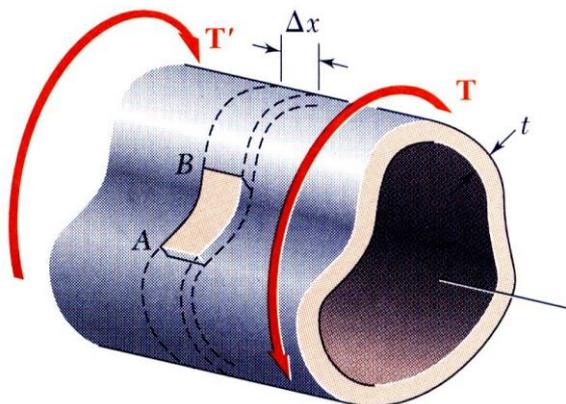


$$\tau_{max} = \frac{3T t_{max}}{\sum a_i t_i^3}$$

$$\phi = \frac{3TL}{G \sum a_i t_i^3}$$



# Torção - perfis de parede finas fechado

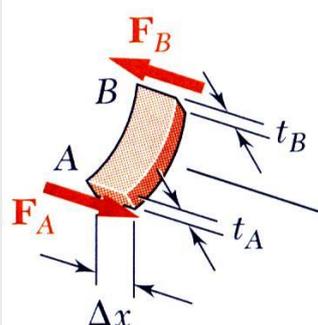


Somando as forças na direcção  $x$  na porção AB, verifica-se que a tensão de corte varia inversamente com a espessura.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \tau_A(t_A \Delta x) - \tau_B(t_B \Delta x) = 0$$

$$\Rightarrow \tau_A t_A = \tau_B t_B$$

Fluxo de Corte:  $q = \tau t$

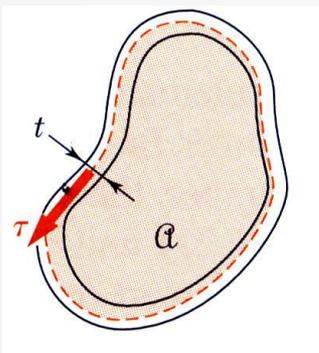
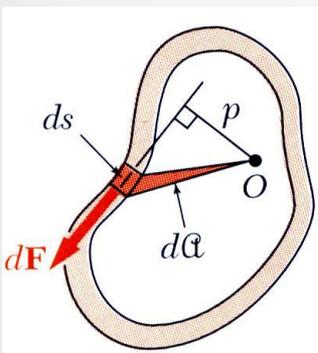


Calculo do momento torsor através do integral de momentos originado pela tensão de corte.

$$dM_0 = p \cdot dF = p \cdot \tau(t ds) = q(p ds) = 2q dA$$

$$T = \oint dM_0 = \oint 2q dA = 2q \oint dA = 2qA$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{2A t_{min}}$$



O ângulo de torção de um eixo de paredes finas de comprimento  $L$ ,

$$\phi = \frac{TL}{4A^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

$$\phi = \frac{TL}{4A^2 G} \sum \frac{a_i}{t_i}$$