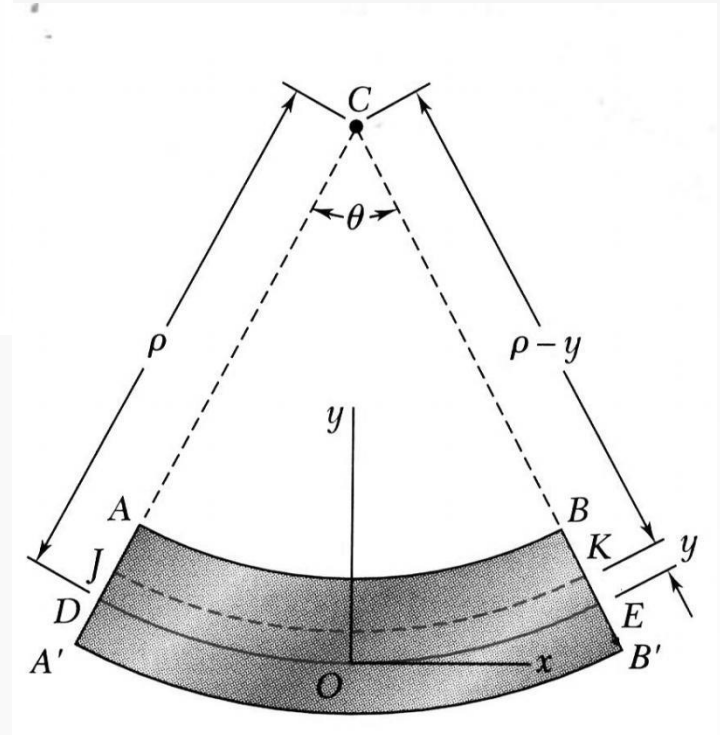
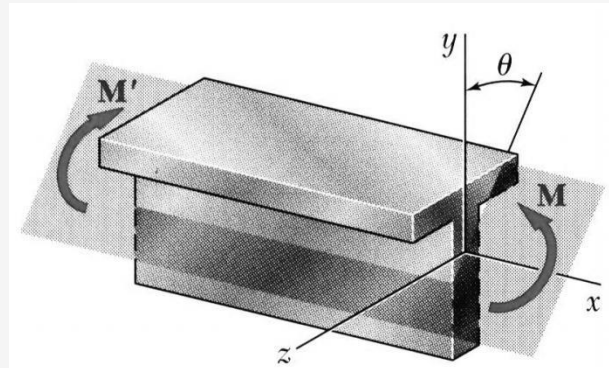
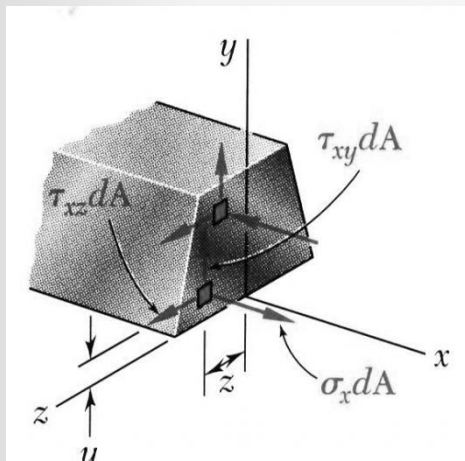


Resistência dos Materiais

Capítulo 4 - Flexão



Acetatos e imagens baseados nos livros:

- Mechanics of Materials - Beer & Johnson
- Mecânica e Resistência dos Materiais – V. Dias da Silva
- Resistência dos Materiais, R.C. Hibbeler

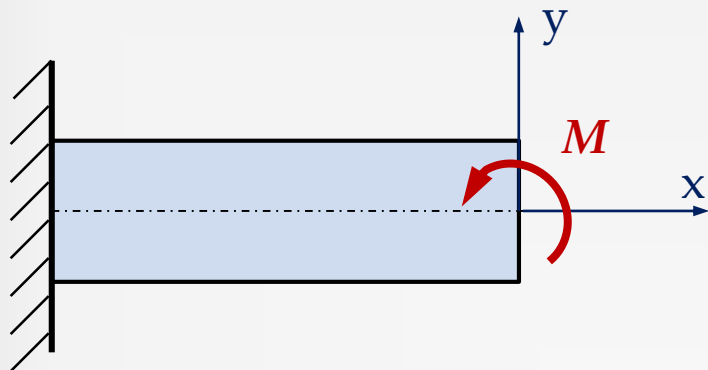


- Flexão Pura
- Flexão Simples
- Flexão Composta
- Deformações por flexão
- Extensão devido a flexão
- Propriedades das secções de viga
- Deformações numa secção transversa
- Concentração de Tensões
- Flexão desviada
- Equação da Línea Elástica



Flexão Pura e Flexão Simples

Capítulo 4

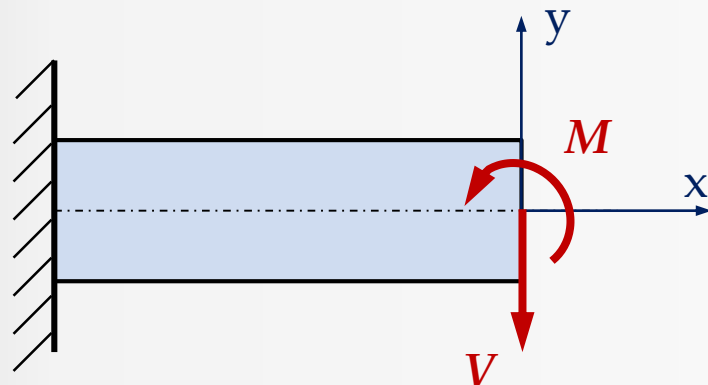


Flexão Pura

Quando os elementos prismáticos estão sujeitos apenas a **momentos fletores** iguais e opostos no mesmo plano.

$$M = \text{Constante} ; V = 0 ; N = 0 ; T = 0$$

$$\left(\frac{dM}{dx} = V \right)$$



Flexão Simples ou Flexão Transversal

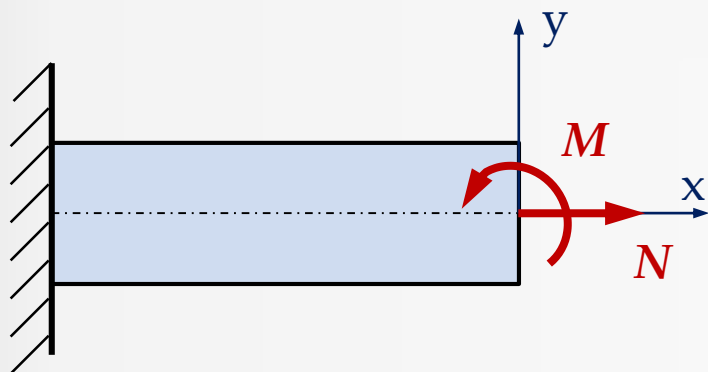
Cargas transversais concentradas ou distribuídas produzem forças internas equivalentes a uma força de corte (**esforço transversal**) e a **momentos fletores**.

$$M \neq 0 ; V \neq 0 ; N = 0 ; T = 0$$

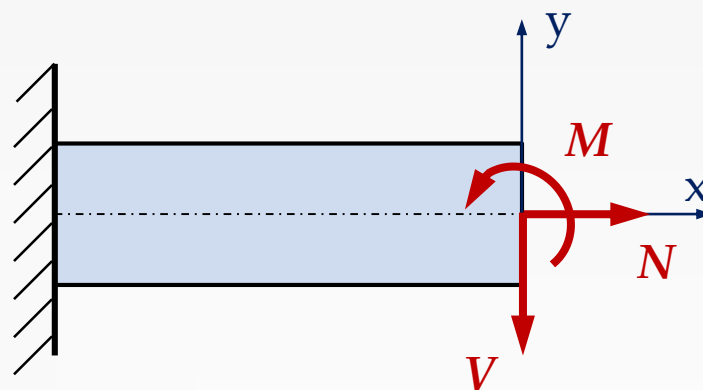


Flexão Composta

A tensão normal provocada por flexão pura pode ser composta com a tensão normal devido à carga axial e com a tensão devida ao carregamento de corte e/ou pelo momento fletor.



$$M \neq 0; V = 0; N \neq 0; T = 0$$

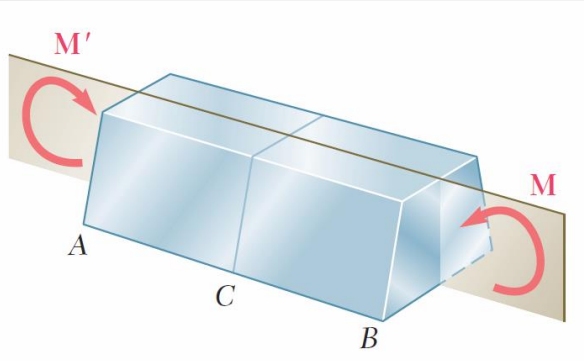


$$M \neq 0; V \neq 0; N \neq 0; T = 0$$



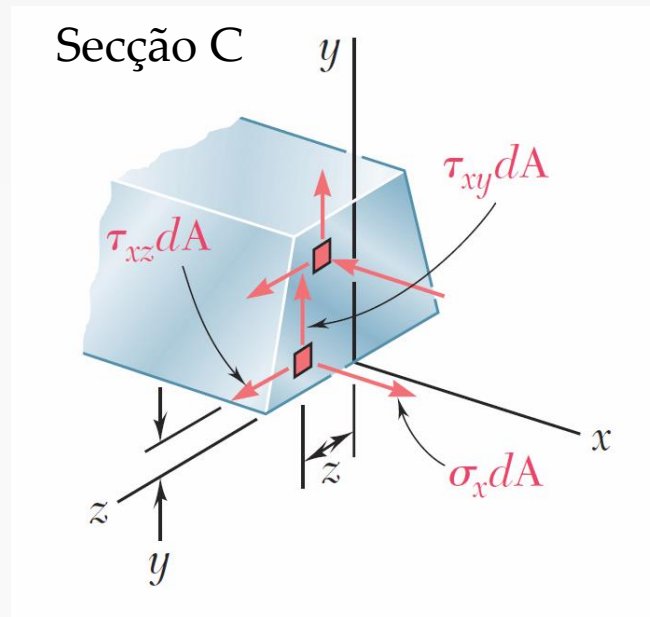
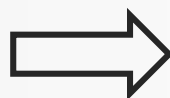
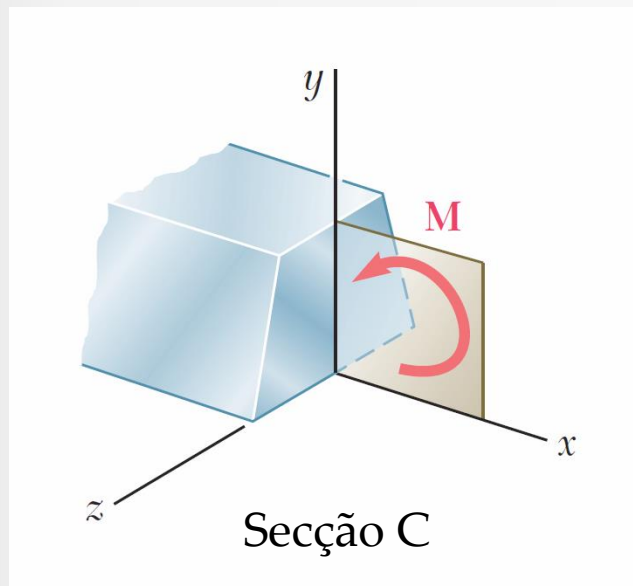
Flexão Pura – Equações de equilíbrio estático

Capítulo 4



Um binário $M-M'$ define-se como **dois momentos de igual intensidade** e sentidos opostos.

O momento M irá produzir uma distribuição de esforços $\sigma_x dA$ com a direção xx , produzindo assim na secção uma força resultante em xx , um momento segundo yy e outro momento segundo zz .



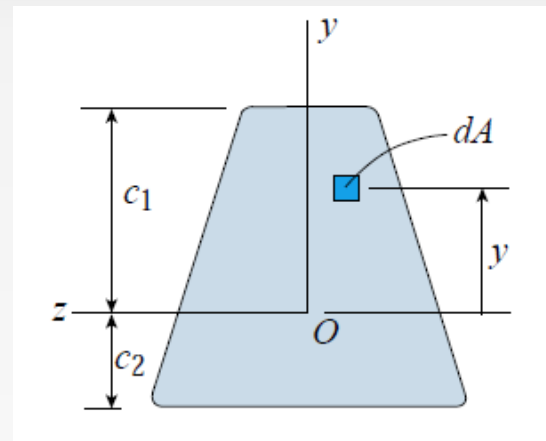
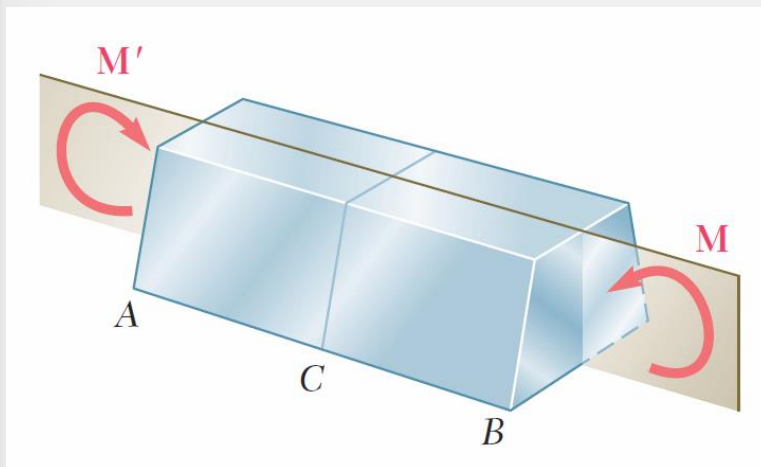
- A secção C está em equilíbrio estático logo os somatórios da resultante dos esforços são nulos:

$$\sum F_x = 0 ; \sum M_y = 0 \text{ e } \sum M_z = 0$$

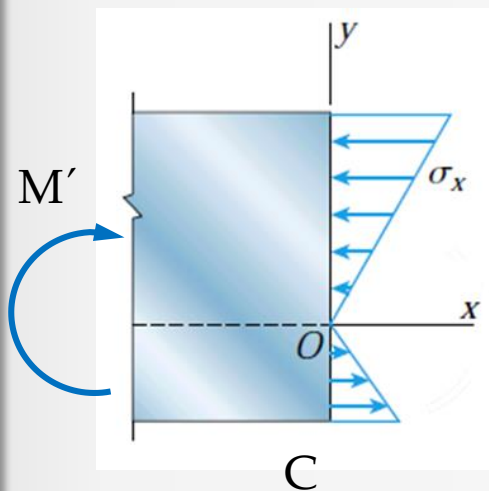


Flexão Pura – Equilíbrio estático – M_z

Capítulo 4



Secção C



- O parte do corpo AC está em equilíbrio estático. A outra parte CB vai desenvolver um perfil **de tensões normais de compressão (-) e tensões normais de tração (+)** ao longo da secção C.
- As tensões normais σ_x **são negativas** quando a coordenada y **for positiva**.

Equilíbrio de momentos no eixo zz

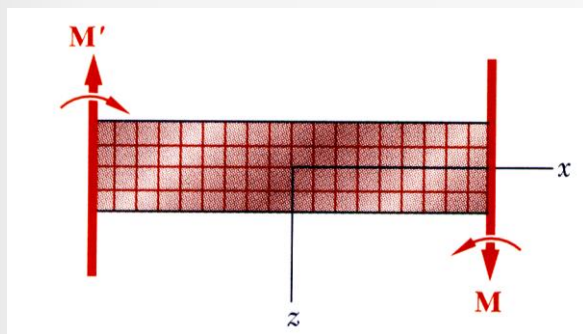
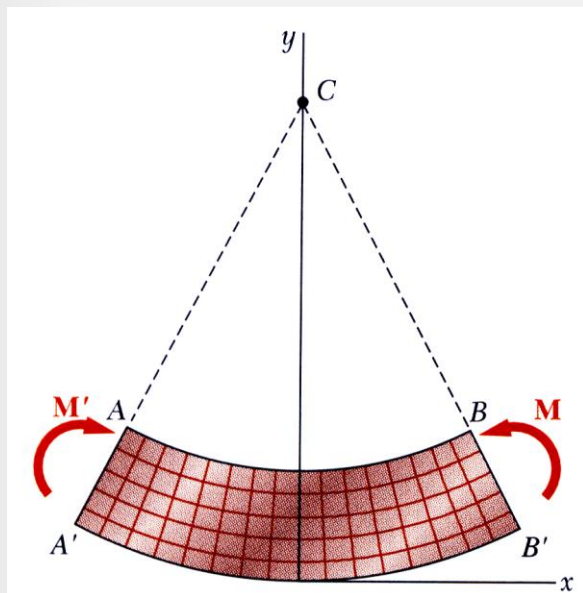
$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \int_A y \sigma_x dA + M' = 0 \Rightarrow$$

$$M = \int_A -y \sigma_x dA$$



Flexão Pura - Considerações

Capítulo 4



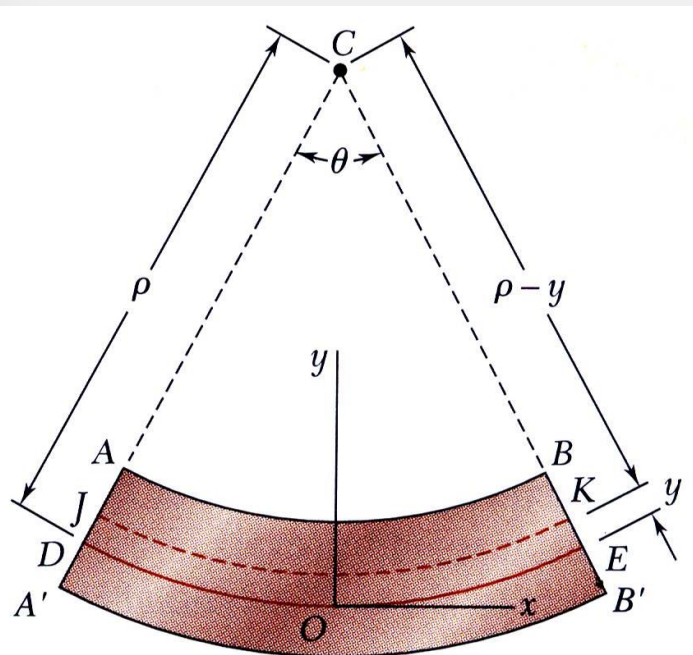
Viga com um plano de simetria em **flexão pura**:

- O elemento permanece simétrico;
- Flete uniformemente, formando um arco circular;
- A curvatura em todos os pontos da barra é a mesma;
- O plano transversal passa pelo centro do arco, mantendo-se plano;
- O comprimento AB diminui, enquanto o de $A'B'$ aumenta;
- Existe uma superfície neutra (fibra neutra), paralela às superfícies superior e inferior e para a qual não se verifica alteração do comprimento;
- As tensões e extensões são negativas (compressão) acima da fibra neutra e positivas (tração) abaixo;



Flexão Pura – Campo de Deslocamentos e Extensão

Capítulo 4



Considerar um segmento de viga de comprimento L .

Após deformação, o comprimento da superfície neutra permanece inalterável.

Nas restantes secções temos:

Deslocamento $L = \rho\theta$ $L' = (\rho - y)\theta$

$$\delta_x = L' - L = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

Extensões

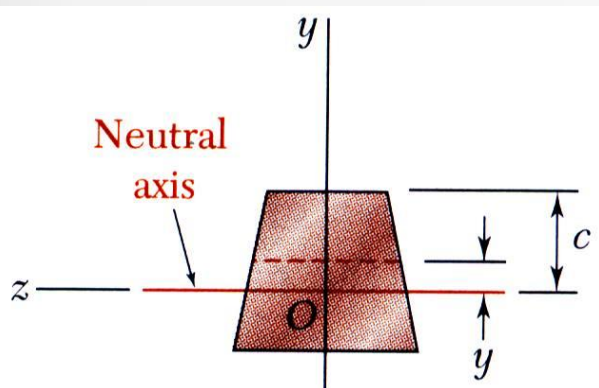
$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{L} = -\frac{y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

$$\epsilon_{max} = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{c}{\epsilon_{max}} \Rightarrow \epsilon_x = -\frac{y}{c} \epsilon_{max}$$

c – distância entre a **fibra neutra** e a **fibra mais afastada**

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho}$$

A extensão varia linearmente com a coordenada y





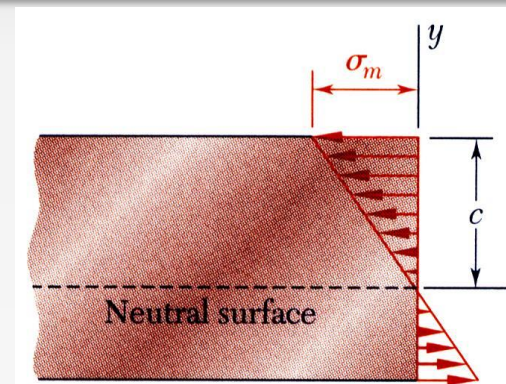
Flexão Pura – Tensão normal

Capítulo 4

Num material linear-elástico, temos

$$\boxed{\sigma_x = E \varepsilon_x} = -\frac{y}{c} E \varepsilon_{max} \Rightarrow \sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_{max}$$

A tensão varia linearmente com a coordenada y



Pelo equilíbrio estático, $\sum F_x = 0$

$$\sum F_x = \int_A \sigma_x dA = 0$$

$$\sum F_x = \int_A -\frac{y}{c} \sigma_{max} dA = 0$$

$$\sum F_x = -\frac{\sigma_{max}}{c} \int_A y dA = 0$$

O 1º momento relativo ao plano neutro é zero. Portanto a superfície neutra tem de passar pelo centroide da secção.

Pelo equilíbrio estático, $\sum M_z = 0$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M = \int_A -y \sigma_x dA$$

$$M = \int_A -y \left(-\frac{y}{c} \sigma_{max} \right) dA$$

$$M = \frac{\sigma_{max}}{c} \int_A y^2 dA = \frac{\sigma_{max}}{c} I_z \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{Mc}{I_z}}$$

$$\sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_{max} \Rightarrow \sigma_x = -\frac{y}{c} \frac{Mc}{I_z}$$

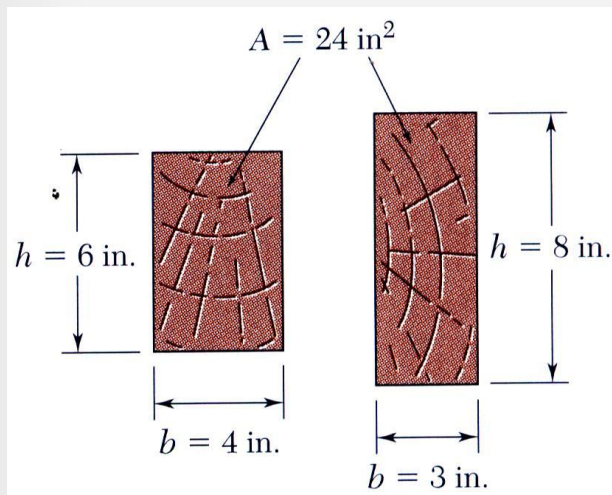
$$\boxed{\sigma_x = -\frac{My}{I_z}}$$

I_z – momento de inercia



Vigas - Módulo de elasticidade da secção

Capítulo 4



A **tensão normal máxima** provocada por flexão é dada por:

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I_z} = \frac{M}{S}$$

S – módulo de elasticidade da secção

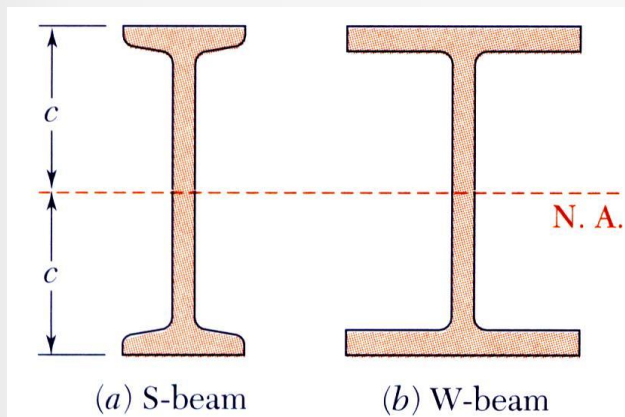
Uma viga com maior S terá, logicamente, menor valor de tensão máxima.

Considerando uma viga retangular,

$$S = \frac{I_z}{c} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}Ah$$

Entre 2 vigas retangulares com igual área transversal, a que possuir maior h terá maior capacidade de resistência à flexão.

Os perfis normalizados (I, H, U, etc.) são projetados para possuir elevados valores de S .

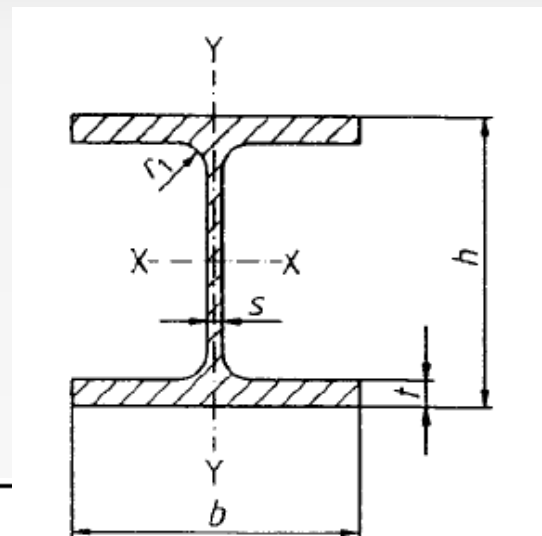




Vigas - Propriedades de perfis normalizados

Capítulo 4

Norma
DIN 1025-2

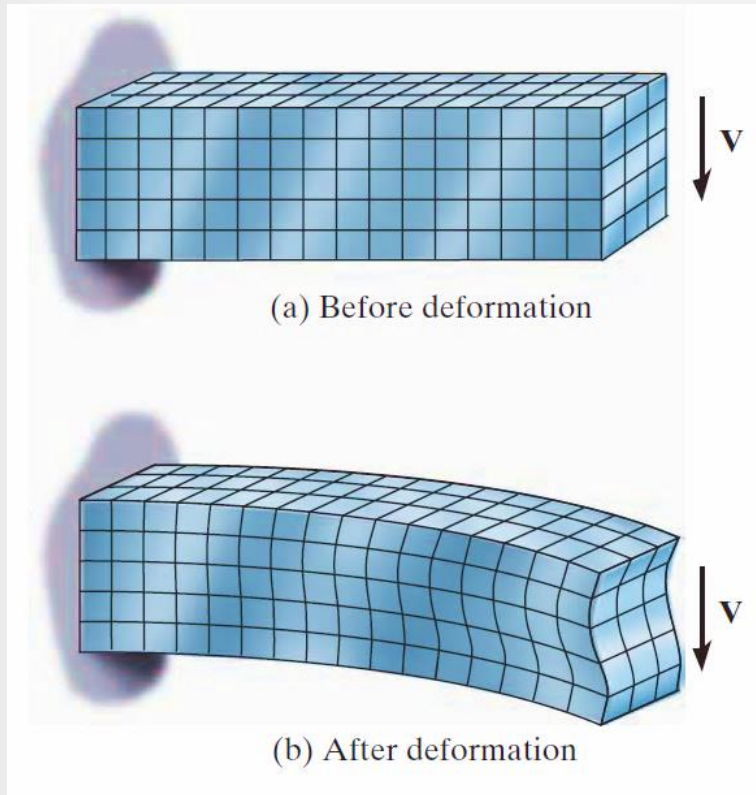


Section symbol*)	Dimensions for					Sec- tion area, in cm ²	Mass, in kg/m	Surface area, in m ² /m	x-x			y-y		
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>r</i> ₁				<i>I</i> _x	<i>S</i> _x	<i>i</i> _x	<i>I</i> _y	<i>S</i> _y	<i>i</i> _y
IPB									cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm
100	100	100	6	10	12	26,0	20,4	0,567	450	89,9	4,16	167	33,5	2,53
120	120	120	6,5	11	12	34,0	26,7	0,686	864	144	5,04	318	52,9	3,06
140	140	140	7	12	12	43,0	33,7	0,805	1 510	216	5,93	550	78,5	3,58
160	160	160	8	13	15	54,3	42,6	0,918	2 490	311	6,78	889	111	4,05
180	180	180	8,5	14	15	65,3	51,2	1,04	3 830	426	7,66	1 360	151	4,57



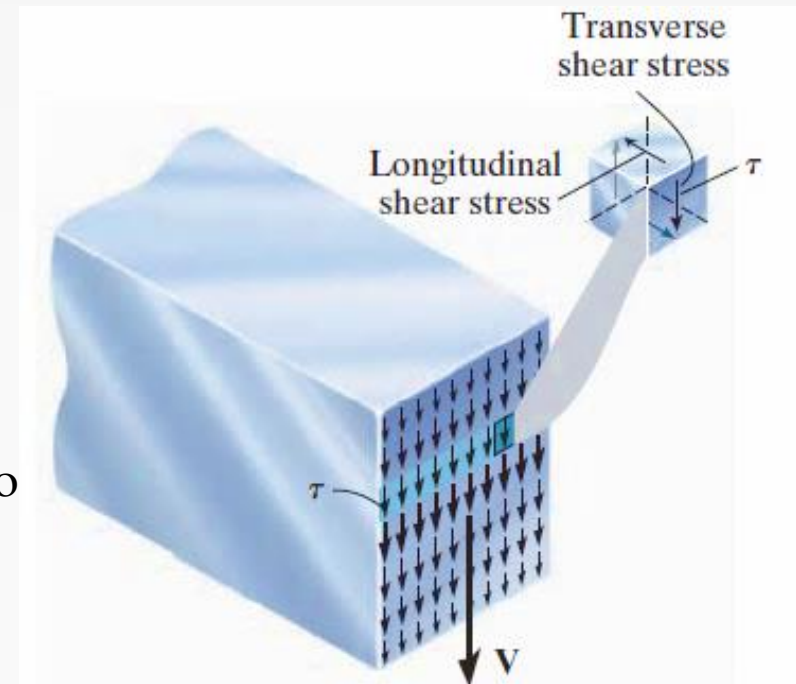
Flexão Simples ou Flexão Transversal – esforço transversal

Capítulo 4



Esforço Transverso

As estruturas sujeitas ao esforço de corte sofrem internamente tensões de corte que variam ao longo da sua seção.



Quando o esforço transversal é significativo as secções já não se mantêm planas.

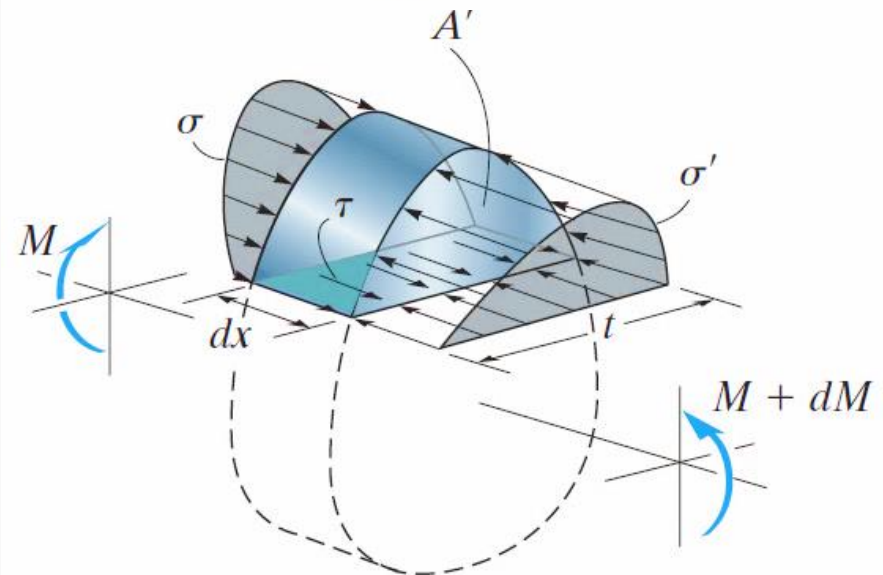
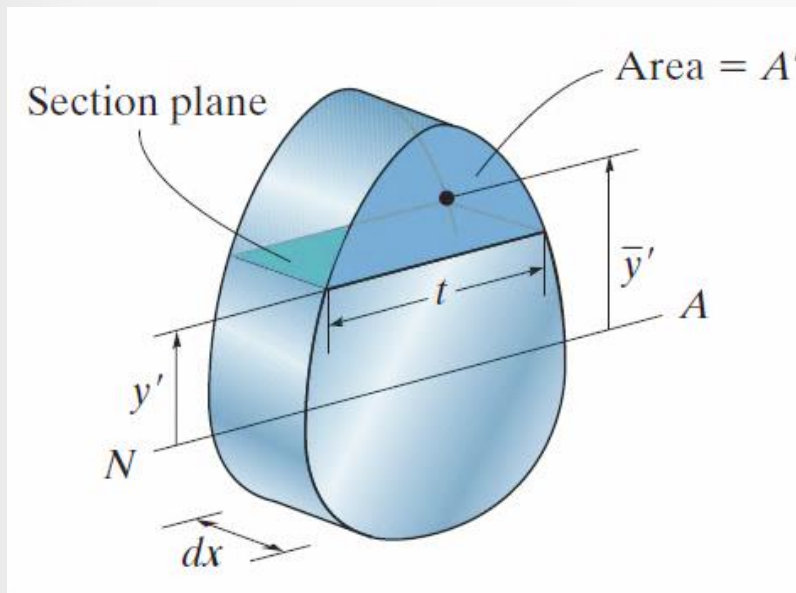
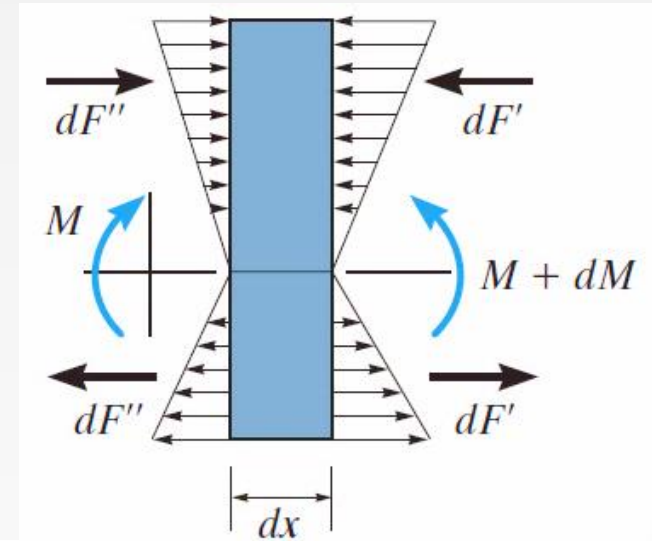
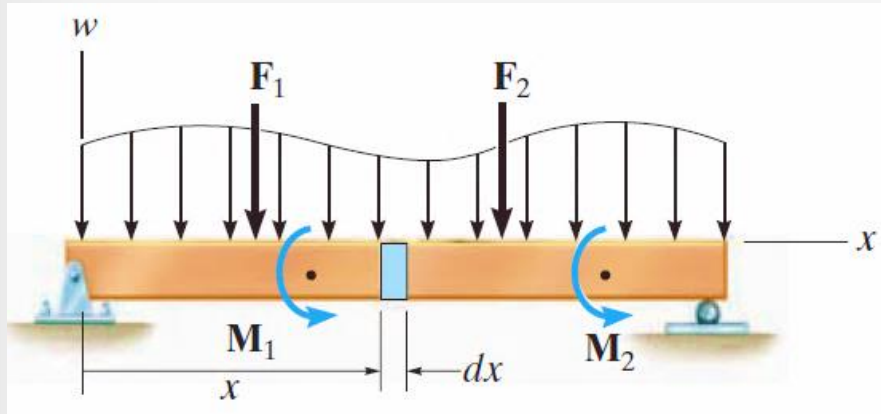
A tensão de corte é **geralmente ignorada** quando a razão entre comprimento e a altura da viga for igual ou superior a 10.



Flexão Simples ou Flexão Transversal – esforço transversal

Capítulo 4

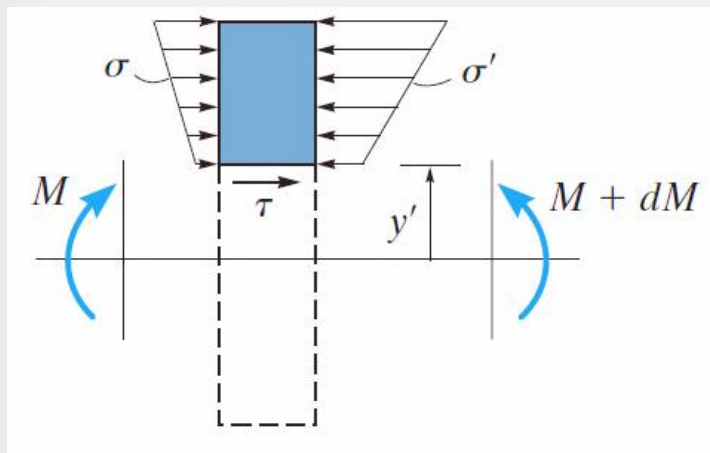
Determinação das tensões de corte.





Flexão Simples ou Flexão Transversal – esforço transversal

Capítulo 4



Fazendo o equilíbrio das forças, $\sum F_x = 0$

$$\tau(tdx) + \int_{A'} \sigma dA' - \int_{A'} \sigma' dA' = 0 \Rightarrow$$

$$\tau(tdx) = - \int_{A'} \left(\frac{M}{I_z} \right) y dA' + \int_{A'} \left(\frac{M + dM}{I_z} \right) y dA'$$

$$\Rightarrow \tau(tdx) = \left(\frac{dM}{I_z} \right) \int_{A'} y dA' \Rightarrow \tau = \frac{1}{t I_z} \left(\frac{dM}{dx} \right) \int_{A'} y dA'$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$Q = \int_{A'} y dA' = \bar{y}' A'$$

Momento estático de Inercia
da figura plana
em relação a linha neutra

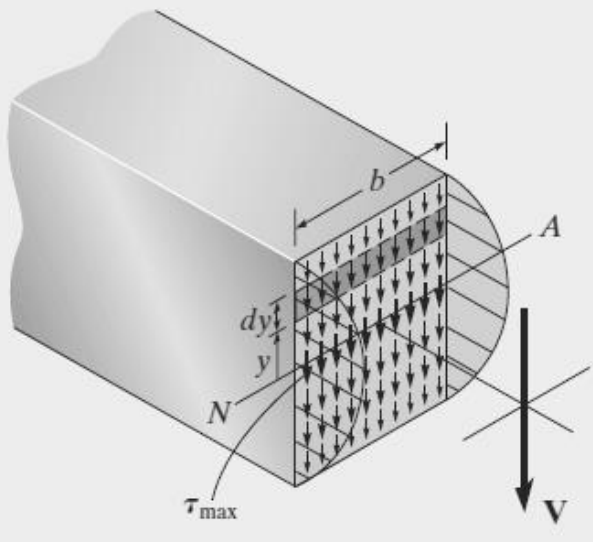
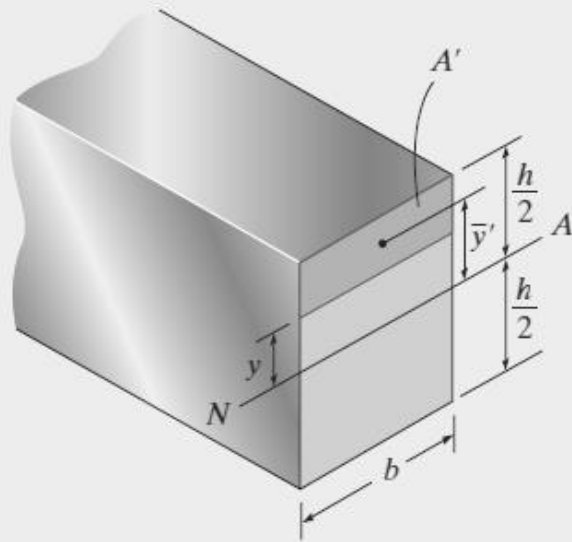
$$\tau = \frac{VQ}{t I_z}$$



Flexão Simples ou Flexão Transversal – esforço transversal

Capítulo 4

Vigas de secção retangular



Momento estático de Inercia

$$Q = \bar{y}' A' = \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] \left(\frac{h}{2} - y \right) b$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) b \quad I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$\tau = \frac{VQ}{t I_z} = \frac{6V}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

A distribuição da tensão de corte é parabólica.
A tensão de corte é máxima em $y = 0$.

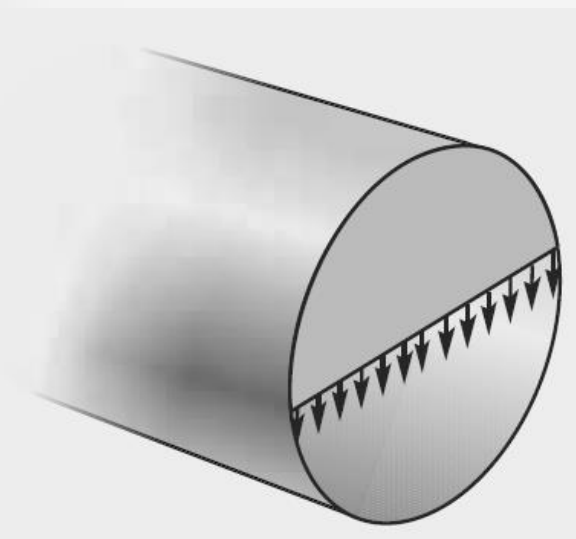
$$\tau_{max} = \frac{3V}{2A}$$



Flexão Simples ou Flexão Transversal – esforço transversal

Capítulo 4

Vigas de secção circular



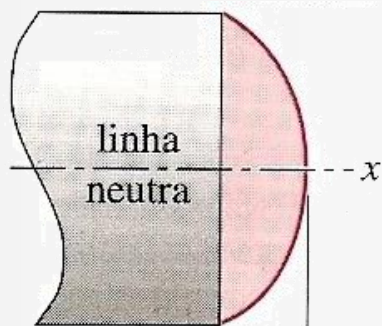
Momento estático
de Inercia

$$Q = \bar{y}' A' = \frac{2}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}$$

Momento de Inercia

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$\tau = \frac{VQ}{t I_z} = \frac{4}{3} \frac{V}{\pi R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$



$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{V}{A}$$

A distribuição da tensão de corte é parabólica.
A tensão de corte é máxima em $y = 0$.

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{V}{A}$$



Flexão Pura desviada

Capítulo 4

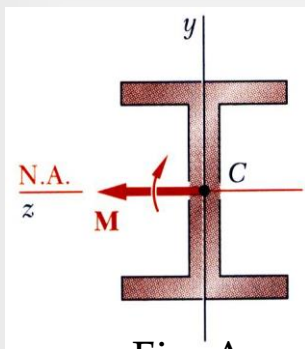


Fig. A

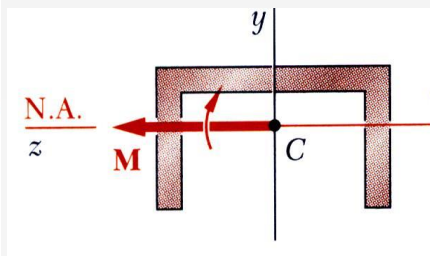


Fig. B

- Até agora, a análise de flexão pura esteve limitada a elementos sujeitos a momentos fletores que **atuam num plano de simetria do elemento** (Fig. A e B).
- Os elementos permanecem simétricos e **fletem no plano de simetria**.

- O **eixo neutro** da secção coincide com o eixo do momento.

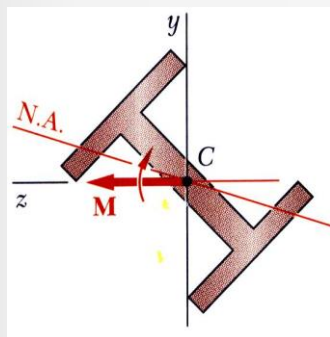


Fig. C

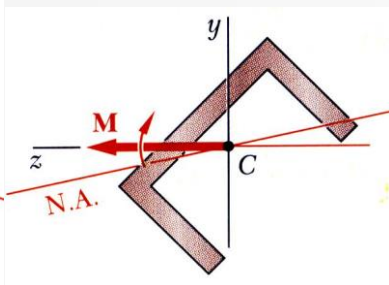


Fig. D

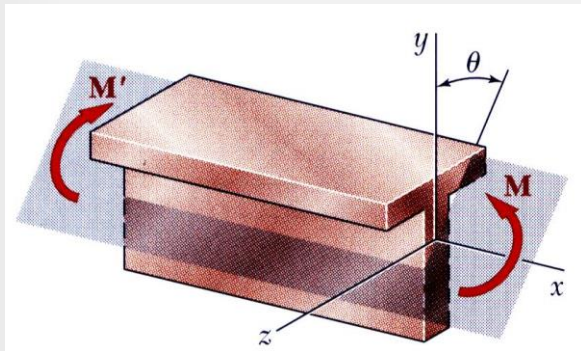
- Consideramos agora situações em que os **momentos não atuam num plano de simetria do elemento** (Fig. C e D).

- **Não se pode assumir** que o elemento irá fletir segundo o plano do momento.
- Nestas situações, geralmente, a **fibra neutra da secção não coincide com o eixo do momento**.

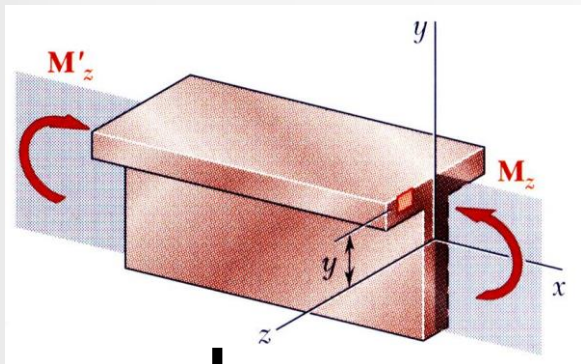


Flexão Pura desviada

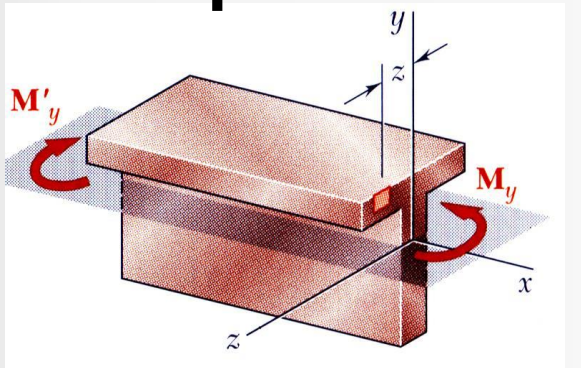
Capítulo 4



=



+



O **princípio da sobreposição** é aplicado para determinar a distribuição de tensões na situação mais geral de Flexão Pura desviada.

Decompor o momento nas respectivas componentes segundo cada uma das direções:

$$M_z = M \cos(\theta) \quad M_y = M \sin(\theta)$$

Associar as tensões existentes em cada direção:

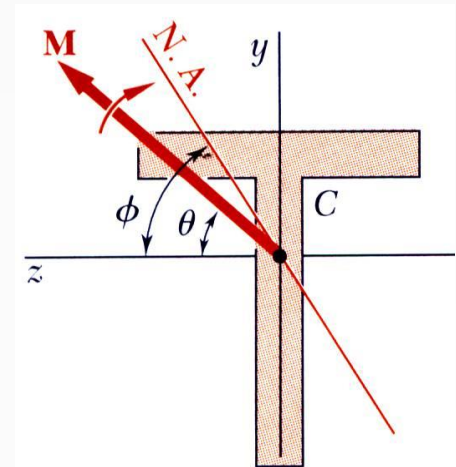
$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

No **linha neutro** temos, $\sigma_x = 0$

$$-\frac{M \cos(\theta) y}{I_z} + \frac{M \sin(\theta) z}{I_y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{I_z \sin(\theta)}{I_y \cos(\theta)} = \frac{y}{z} = \tan(\phi)$$

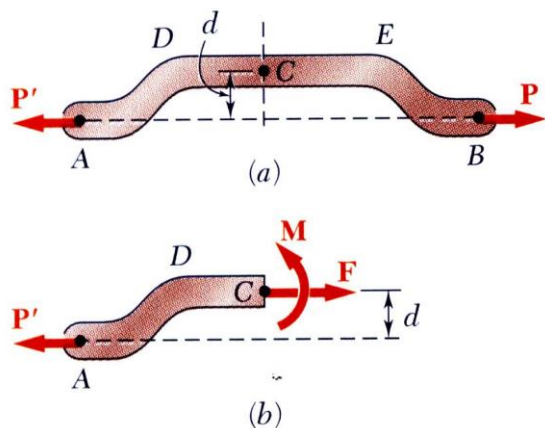
$$y = \frac{I_z}{I_y} \tan(\theta) \cdot z$$





Flexão Composta

Capítulo 4



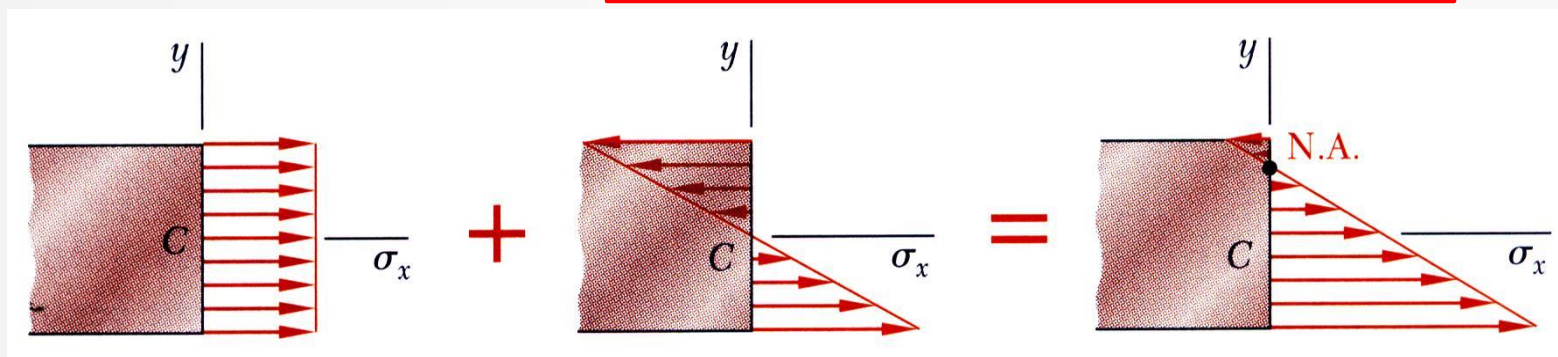
$$M \neq 0; V = 0; N \neq 0; T = 0$$

A distribuição de tensão devida a cargas excêntricas é **determinada por sobreposição** de:

- distribuição uniforme devida à carga centrada;
- distribuição linear devida ao momento fletor;

Carregamento Excêntrico: $F = P$ $M_z = Pd$

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{axial} + (\sigma_x)_{flexão} = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z}$$



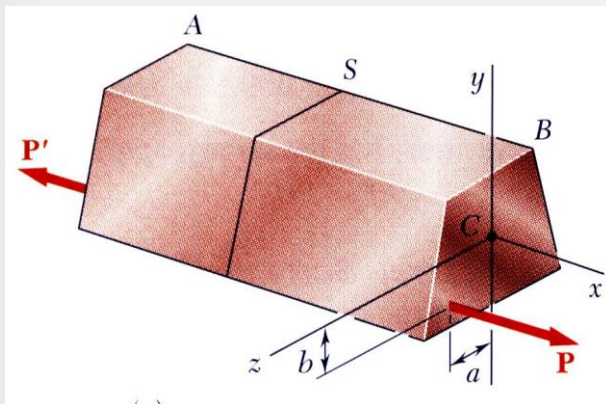
A validade deste resultado requer que:

- as tensões fiquem abaixo do limite proporcionalidade;
- as deformações tenham efeito desprezável na geometria;
- as tensões não sejam determinadas na vizinhança dos pontos de aplicação da força;



Flexão Composta desviada

Capítulo 4



- Considerar um elemento reto sollicitado por forças excêntricas iguais e opostas.
- Por equilíbrio estático, a força excêntrica é equivalente a uma força centrada e a dois momentos:

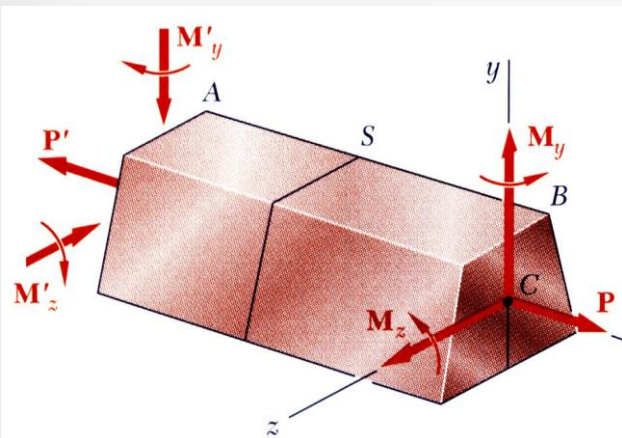
$$P - \text{Carga concentrada} \quad M_y = Pa \quad M_z = Pb$$

Pelo **princípio da sobreposição**, a distribuição de tensões é dada por:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

Como a **linha neutra** $\sigma_x = 0$ pode ser determinada segundo:

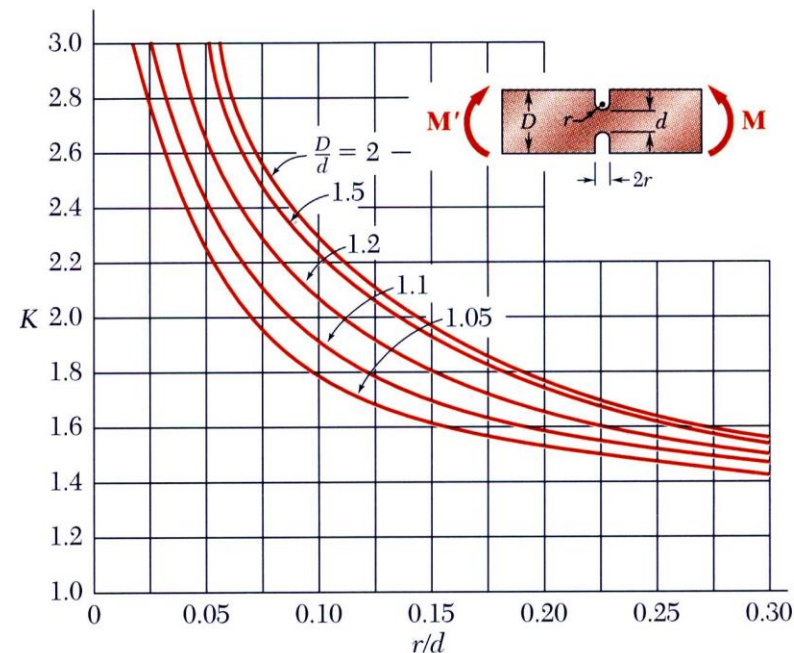
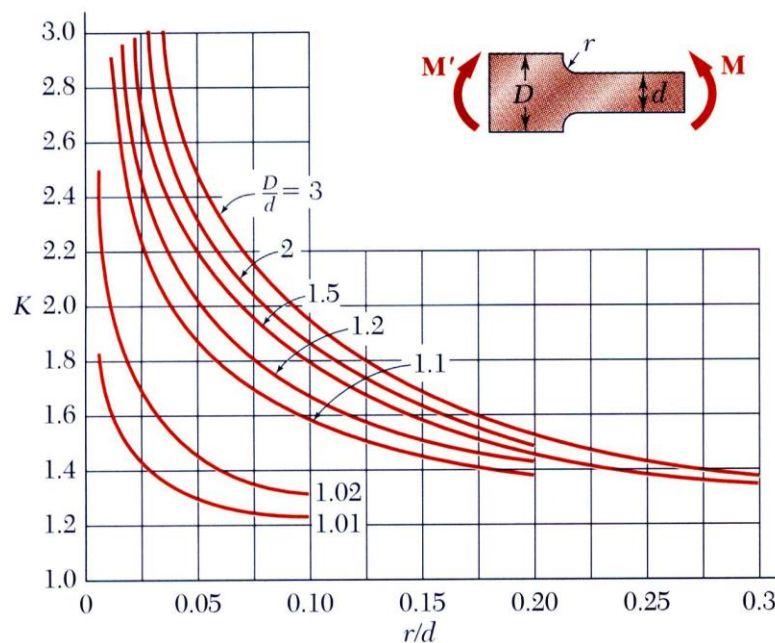
$$\frac{M_z y}{I_z} = \frac{P}{A} + \frac{M_y z}{I_y} \Rightarrow y = \frac{I_z M_y}{I_y M_z} z + \frac{P I_z}{A M_z}$$





Concentração de Tensões

Capítulo 4



A concentração de tensões pode ocorrer:

- Na vizinhança dos pontos onde os esforços são aplicados;
- Na vizinhança de variações bruscas de secção;

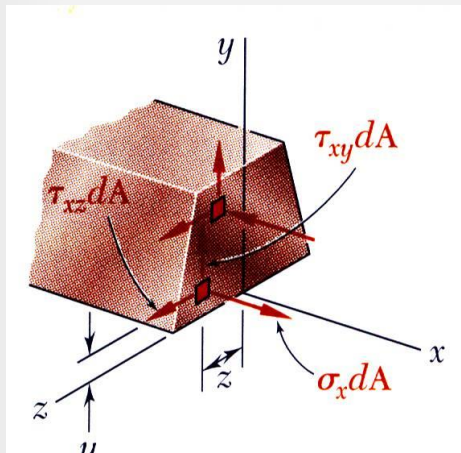
$$\sigma_{max} = K \frac{Mc}{I}$$



Equação da Linha Elástica

Capítulo 4

Resistência dos Materiais



Retomando o equilíbrio estático na secção e a extensão segundo o eixo x , temos;

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad \sigma_x = E\varepsilon_x$$

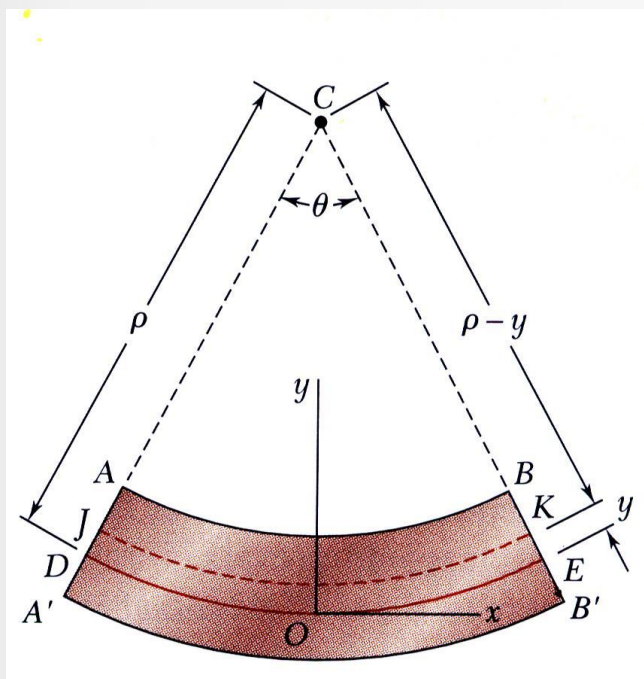
$$\sigma_x = -\frac{Ey}{\rho} \quad M_z = \int_A -y\sigma_x dA$$

$$M_z = \int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA = \frac{EI_z}{\rho} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}}$$

$\frac{1}{\rho}$ - Curvatura

ρ - Raio de curvatura

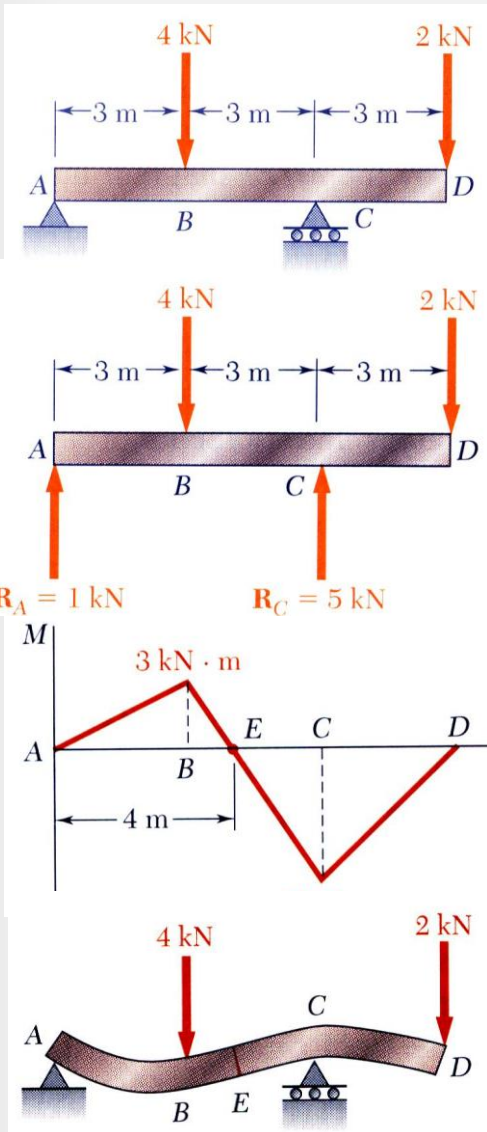




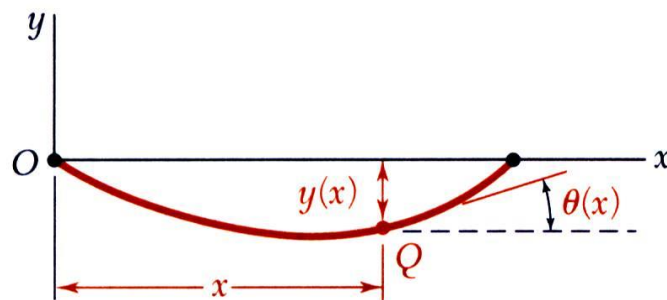
Equação da Linha Elástica

Capítulo 4

Resistência dos Materiais



Considerando um ponto Q da linha elástica, temos:



$y(x)$ - deslocamento vertical

$\theta(x)$ - rotação da secção

Pelo calculo matemático temos :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx}$$

As rotações são pequenas logo $\frac{dy}{dx}$ é muito pequeno

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z}$$

Equação diferencial da linha elástica



Equação da Linha Elástica

Capítulo 4

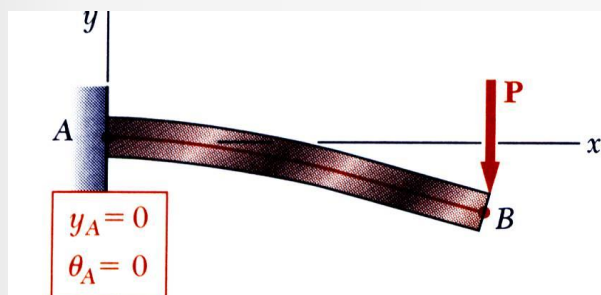
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z}$$

1º Integração

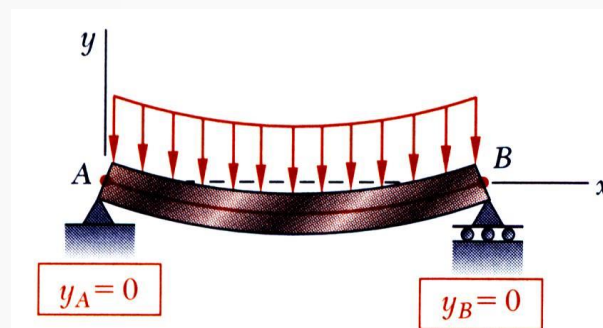
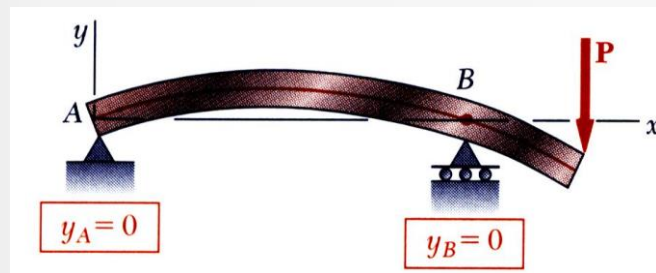
$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{M_z(x)}{EI_z} dx + C_1$$

2º Integração

$$y(x) = \int \int \frac{M_z(x)}{EI_z} dx + C_1 dx + C_2$$



As constantes C_1 e C_2 são calculadas com as chamadas **condições de fronteira**

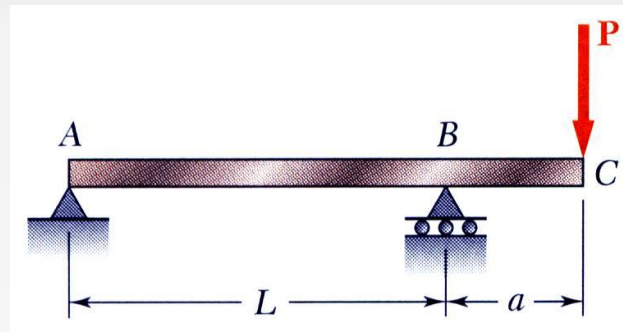




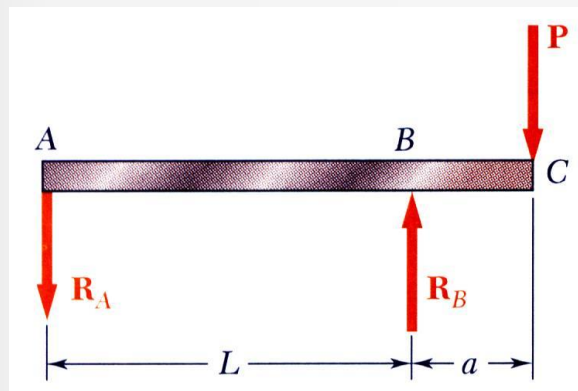
Equação da Linha Elástica - Exemplo

Capítulo 4

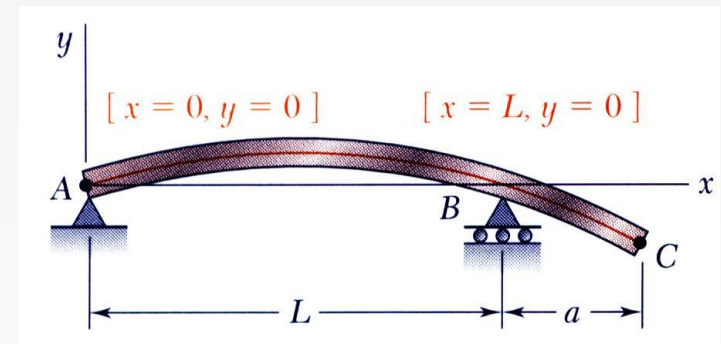
Exemplo



1 - Reações



3 - Condições de fronteira



2 - Momento fletor

$$\frac{dV(x)}{dx} = \omega(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

4 - Deslocamentos

