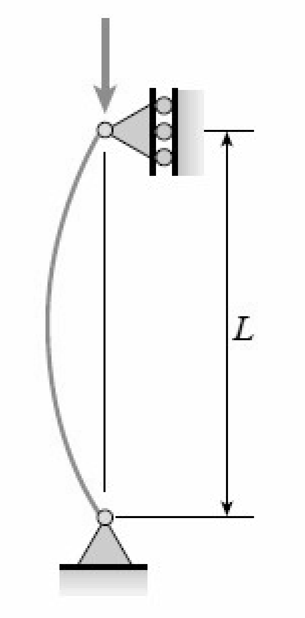
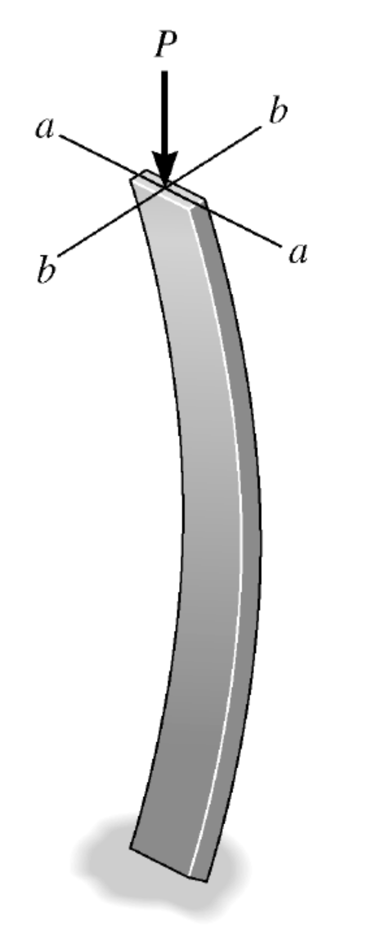
POLITÉCNICO DE LEIRIA
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO

Fundamentos de Mecânica dos Materiais

Capítulo 6

- Estabilidade de estruturas





Acetatos e imagens baseados nos livros:
- Mechanics of Materials - Beer & Jonhson
- Mecânica e Resistência dos Materiais – V. Dias da Silva
- Resistência dos Materiais, R.C. Hibbeler

Fernando Batista - Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Leiria - 2018

Índice

- Noção de instabilidade axial - Flambagem
- Fórmula de Euler
- Fórmula de Euler com vários tipos de apoios
- Fórmula de Johnson
- Projeto de colunas

Noção de instabilidade axial - Flambagem

Exemplos

- Coloque uma régua de pé sobre uma mesa e exerça uma força vertical no topo da régua. A medida que aumenta a força a régua vai iniciar um processo de flexão encurvando a régua. Se continuar a aumentar a força a régua irá quebrar pois o plástico é um material frágil.

- Se colocar um pé sobre uma lata de 33cl vai reparar que ela será amaçada logo a partir de uma determinada força.

Noção de instabilidade axial - Flambagem

Colunas: Elementos estruturais compridos e esbeltos sujeitos a uma força axial de compressão.

Flambagem: Deflexão lateral que as colunas sofrem também designada por **encurvadura**. Este fenómeno torna a estrutura instável e grande parte das vezes leva a uma falha repentina e dramática da estrutura.

Carga Crítica (P_{cr}) : É a carga axial máxima que uma coluna pode suportar antes de ocorrer a flambagem ou a instabilidade da estrutura.

Qualquer carga adicional provocará flambagem na coluna ou seja instabilidade estrutural.

Formula de Euler - Colunas

Determinação da Carga Crítica

Ao assumir uma carga de compressão significativa, a coluna vai fletir.
A equação diferencial do deslocamento y devido à flexão é dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

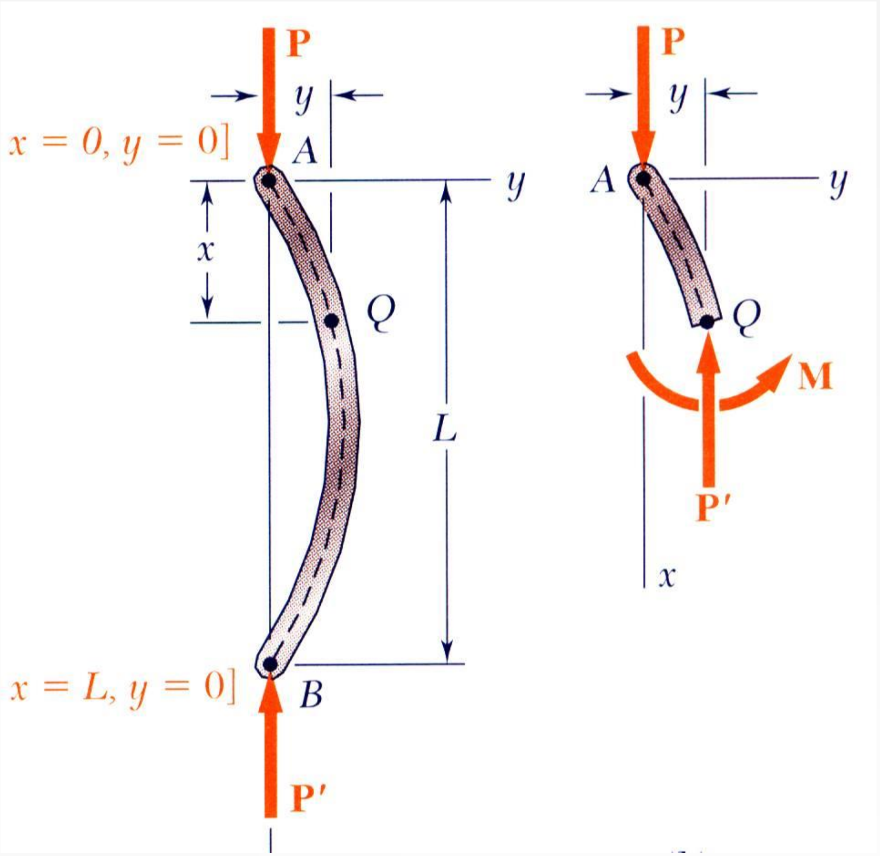
Em qualquer secção o momento fletor M é descrito por:

$$\mathrm{M} = -\mathrm{P} \cdot y$$

Assim temos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI}\right) y = 0$$

Coluna entre dois apoios fixos



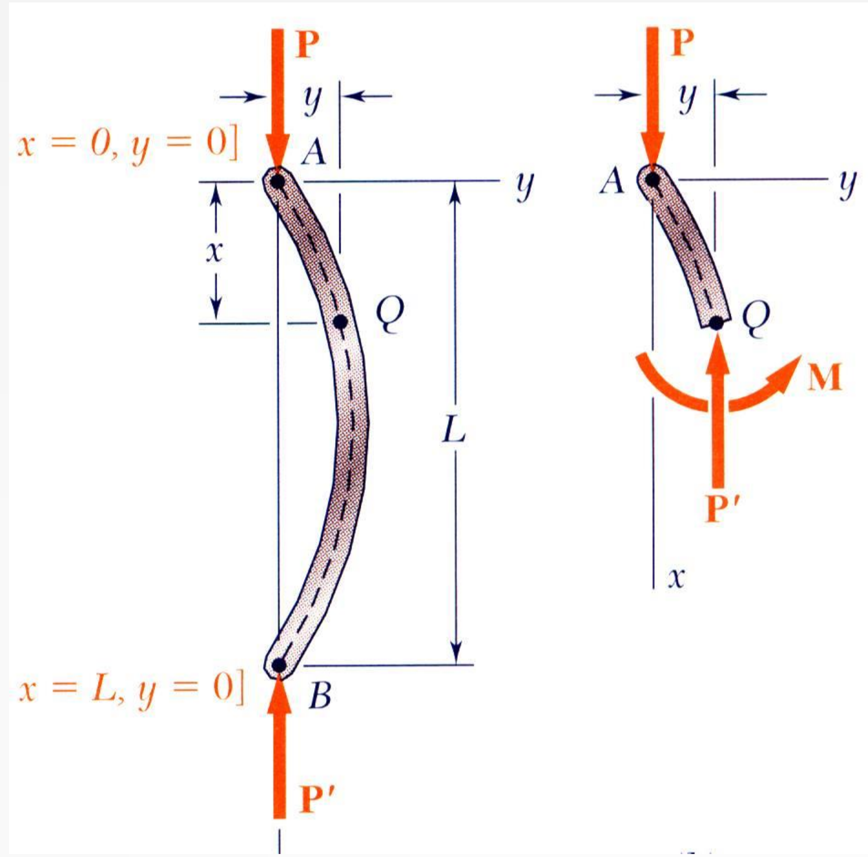
I – Menor momento de inercia da secção

E – Módulo de Elasticidade do material

Formula de Euler - Colunas

Determinação da Carga Crítica

Coluna entre dois apoios fixos



Esta equação diferencial tem a seguinte solução:

$$y = C_1 \cdot sen\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \cdot cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

Esta equação do deslocamento depende de duas constantes C_1e C_2 que podem ser determinadas com duas condições de fronteira:

$$y(0) = 0 \text{ e } y(L) = 0$$

Com $y(0) = 0$ temos:

$$y = C_1 \cdot \underbrace{sen(0)}_{0} + C_2 \cdot \underbrace{cos(0)}_{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C_1 \cdot sen\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

Formula de Euler - Colunas

Determinação da Carga Crítica

$$y = C_1 \cdot sen\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

Com $y(L) = 0$ temos:

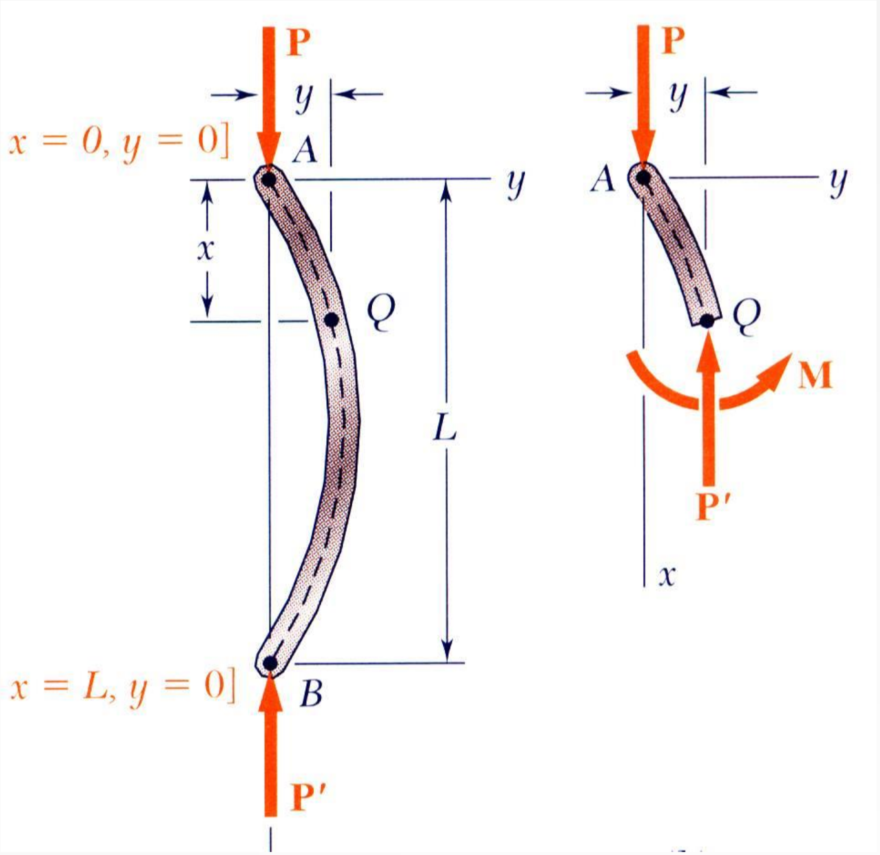
$$C_1 \cdot sen\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

Temos um produto entre dois valores logo temos duas condições, ou:

<u>Condição 1</u>: $C_1 = 0$ ou

<u>Condição 2</u>: $sen\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$

Coluna entre dois apoios fixos



<u>Condição 1</u> - Se $C_1 = 0$ temos $y = 0$, ou seja, a coluna mantem-se vertical. Quando isto acontecer a Carga não será suficiente para criar instabilidade.

Formula de Euler - Colunas

Determinação da Carga Crítica

Condição 2

Se $sen\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$ temos:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}L = n\pi \Rightarrow P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}\ , n = 1,2, \ldots$$

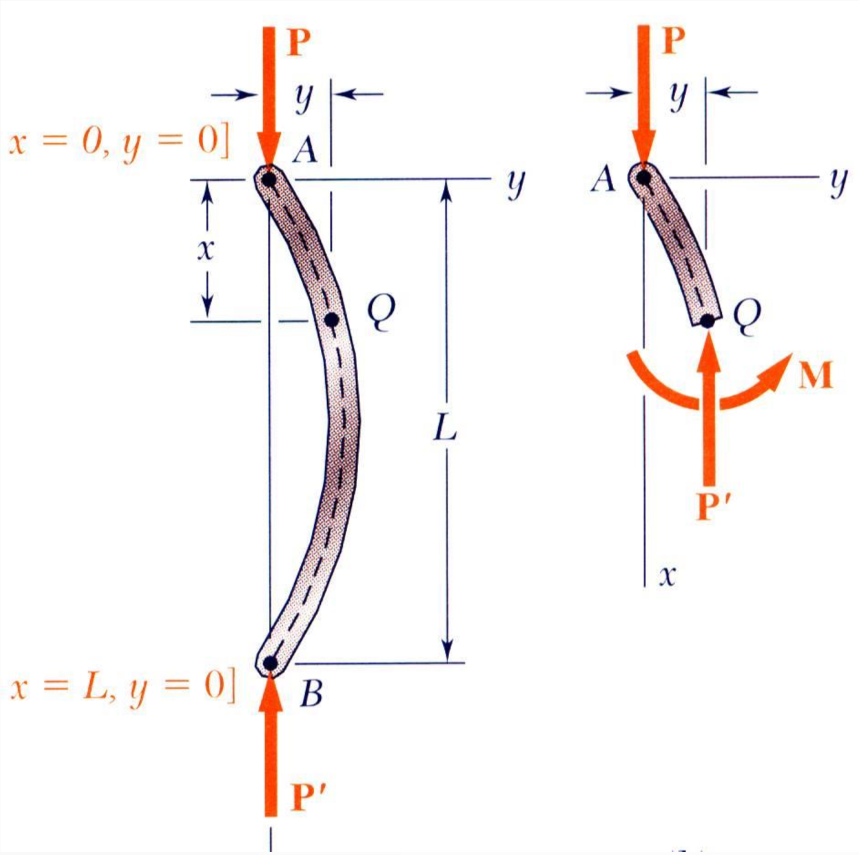
Para cada *n* temos uma Carga que anula a Condição 2, logo para cada *n* temos uma carga crítica.

Para n=1 temos o **menor valor de P** logo a Carga Crítica.

Carga Crítica
Formula de Euler

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

Coluna entre dois apoios fixos



O modo de flambagem correspondente:

$$y(x) = C_1 \cdot sen\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

Formula de Euler - Colunas

Tensão Crítica e Índice de esbeltez

$$\left.\begin{array}{l} P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2} \\ \sigma_{cr} = \dfrac{P_{cr}}{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2 A} \\ \boxed{r = \sqrt{\dfrac{I}{A}}} \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{L^2} i^2 = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

σ_{cr} – **Tensão Crítica** *(Critical Stress)*

r – **Raio de Giração da secção** em relação ao mesmo eixo do momento de inercia I

Índice de Esbeltez $\boxed{\lambda = \dfrac{L}{r}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}}$ **Tensão Crítica Formula de Euler**

λ – **Índice de Esbeltez** – *(Slenderness Ratio)*

É medida da flexibilidade da coluna e pode ser entendida como uma característica geométrica da estrutura que tem a informação da secção em relação a um eixo, comprimento e aos apoios nessa direcção.

Formula de Euler - Colunas

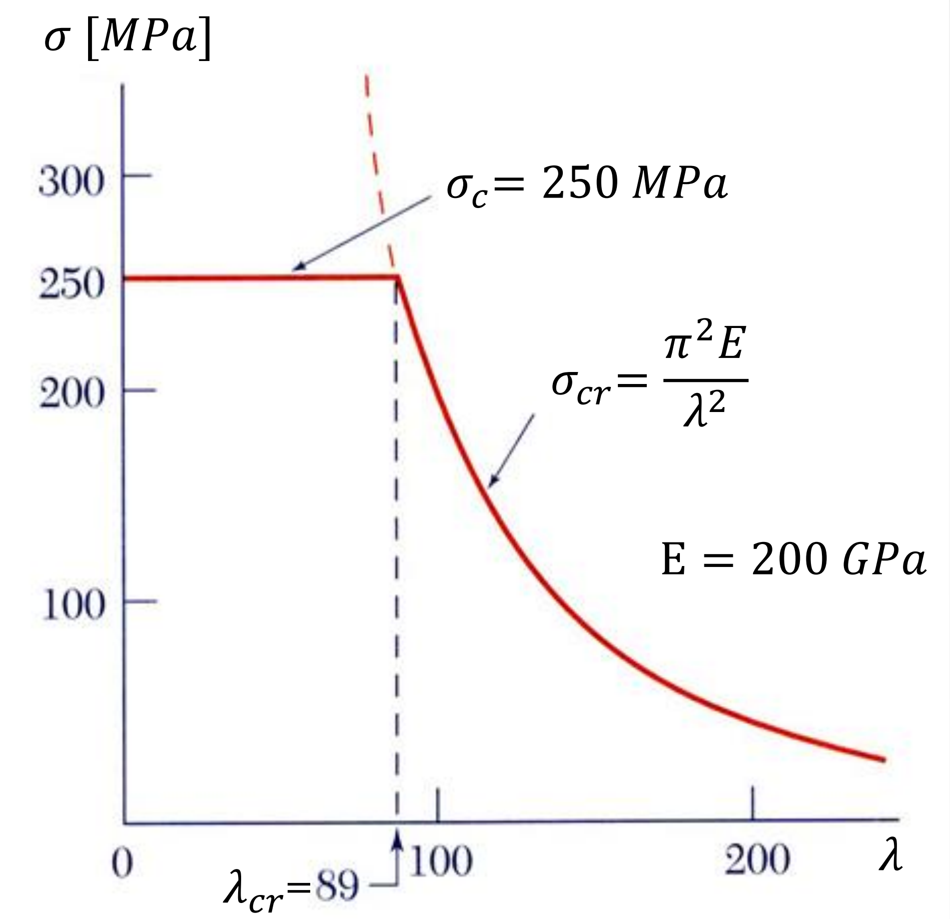
Tensão Crítica
vs. Índice de esbeltez

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Quando a Tensão Crítica for igual a tensão de cedência do material encontramos o Índice Esbeltez limite ou critico. Ou seja;

$$\sigma_{cr} = \sigma_c \;\Rightarrow\; \boxed{\lambda_{cr} = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_c}}}$$

Índice de Esbeltez limite ou Índice de Esbeltez critico.



Para $\sigma_{cr} > \sigma_c \;\Rightarrow \lambda < \lambda_{cr}$ há deformação plástica antes de haver instabilidade

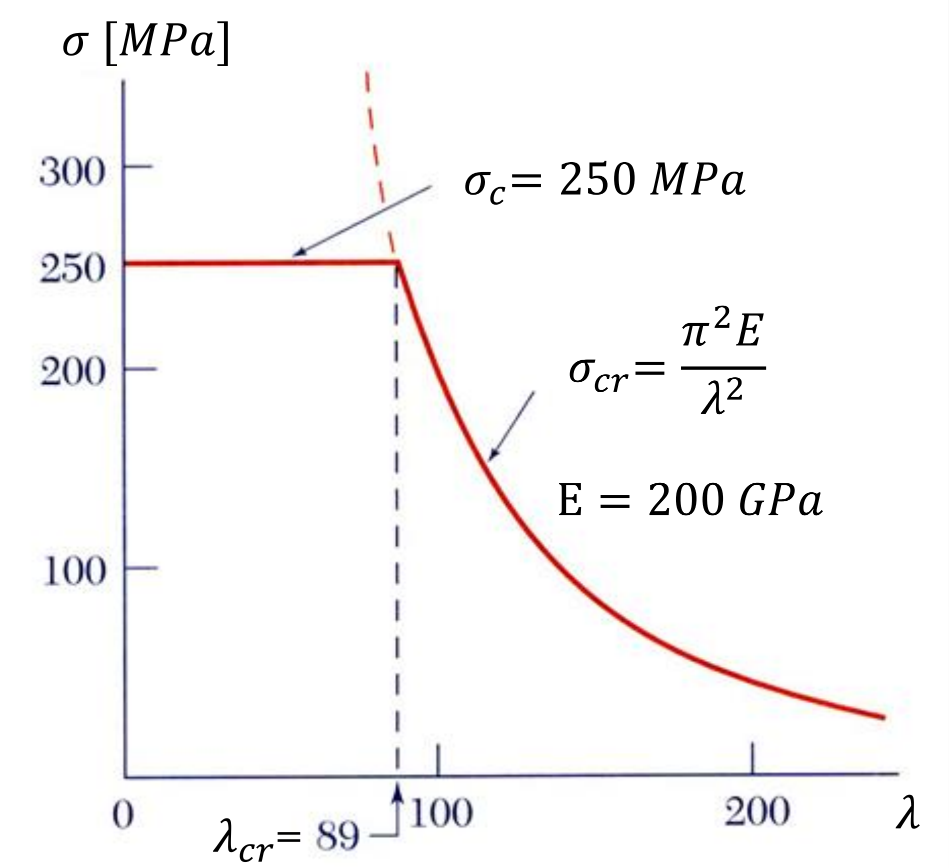
Nota: A σ_c pode ser substituída numa situação de projeto pela σ_{adm}

Formula de Euler - Colunas

Como melhor a estrutura para evitar a encurvadura.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad \lambda = \frac{L}{r} \qquad r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Devemos aumentar $\sigma_{cr}\uparrow$
ou seja,
- aumentar o $E\ \uparrow$
- diminuir o $\lambda^2\ \downarrow$
  ou seja,
  - diminuir $L\ \downarrow$
  - aumentar $r\ \uparrow$
    ou seja,
    - aumentar $I\ \uparrow$
    - diminuir $A\ \downarrow$



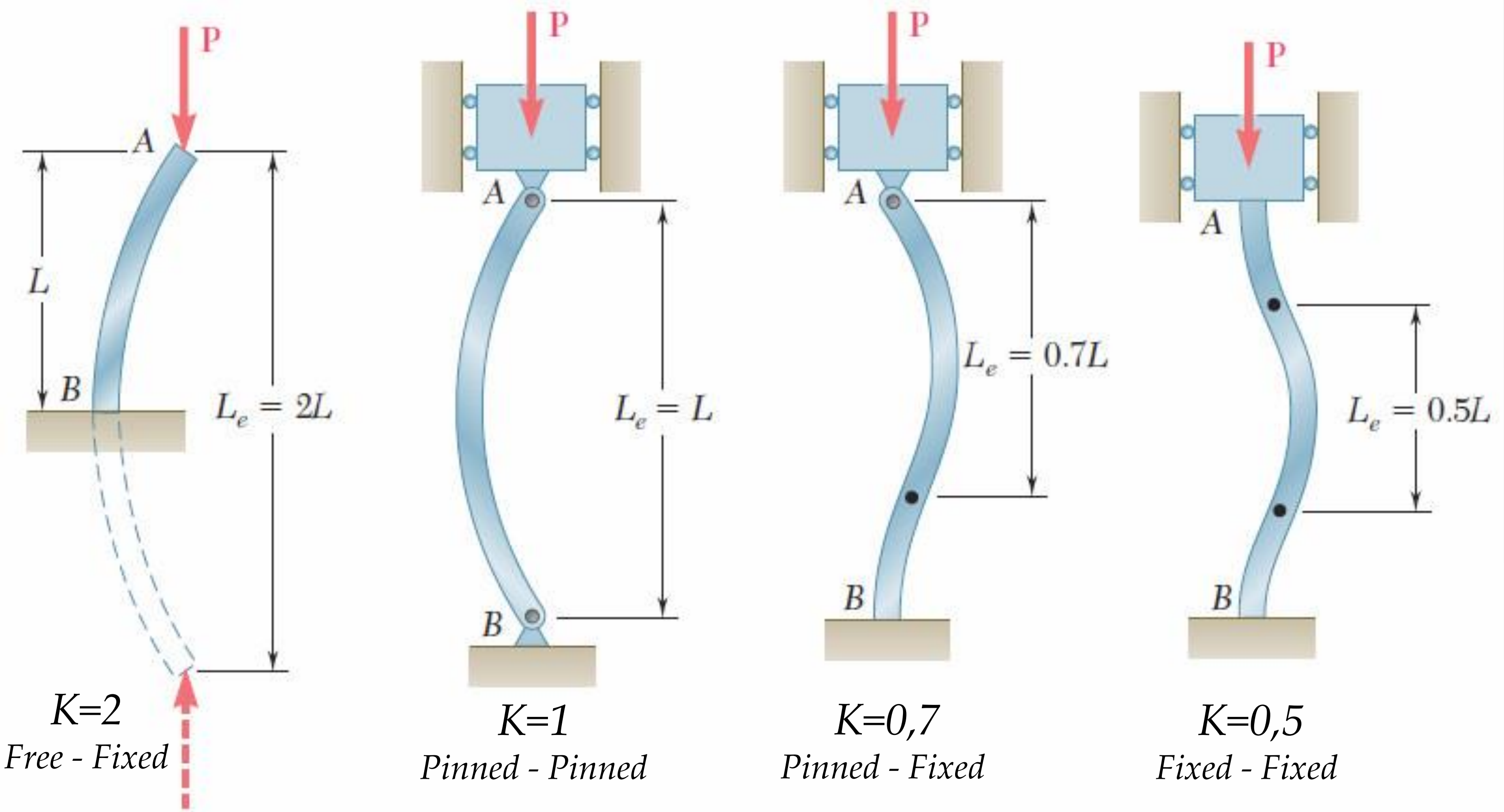
$$\sigma_{cr}\uparrow \Rightarrow \begin{cases} E\uparrow \\ \lambda^2\downarrow \Rightarrow \begin{cases} L\downarrow \\ r\uparrow \Rightarrow \begin{cases} I\uparrow \\ A\downarrow \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Formula de Euler - Colunas com vários tipos de apoios

A tensão crítica é alterada se os apoios da coluna mudarem.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_e^2} \qquad \lambda_e = \frac{L_e}{r} \qquad L_e = \mathrm{K} \cdot \mathrm{L}$$

K - Fator do comprimento efetivo
L_e - Comprimento efetivo
λ_e - Índice de esbeltez efetivo



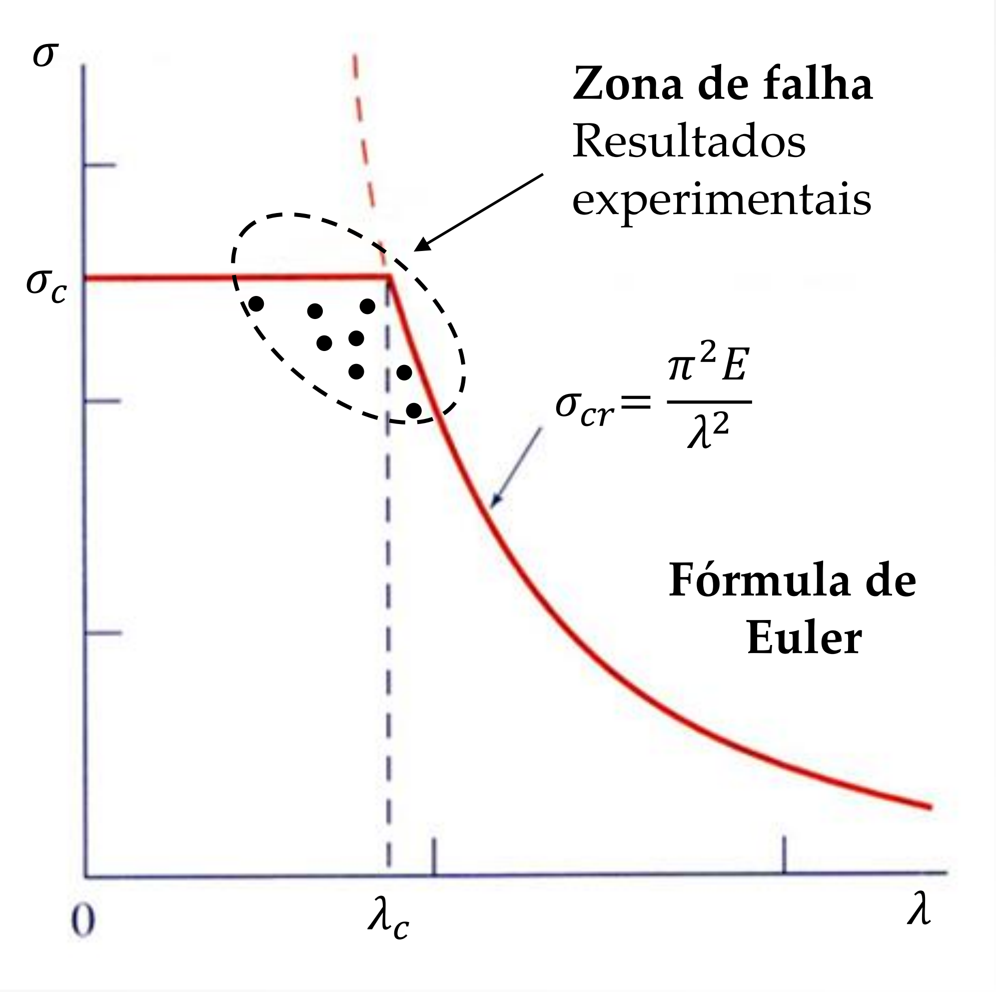
K=2	*K=1*	*K=0,7*	*K=0,5*
Free - Fixed	*Pinned - Pinned*	*Pinned - Fixed*	*Fixed - Fixed*

Fórmula de Euler – Limite

Limite da Fórmula de Euler

Na prática nas colunas com um índice de esbeltez baixo verifica-se experimentalmente falhas abaixo da tensão de cedência e abaixo da curva de Euler.

A lei empírica mais utilizada para resolver este problema é a parábola de Johnson.

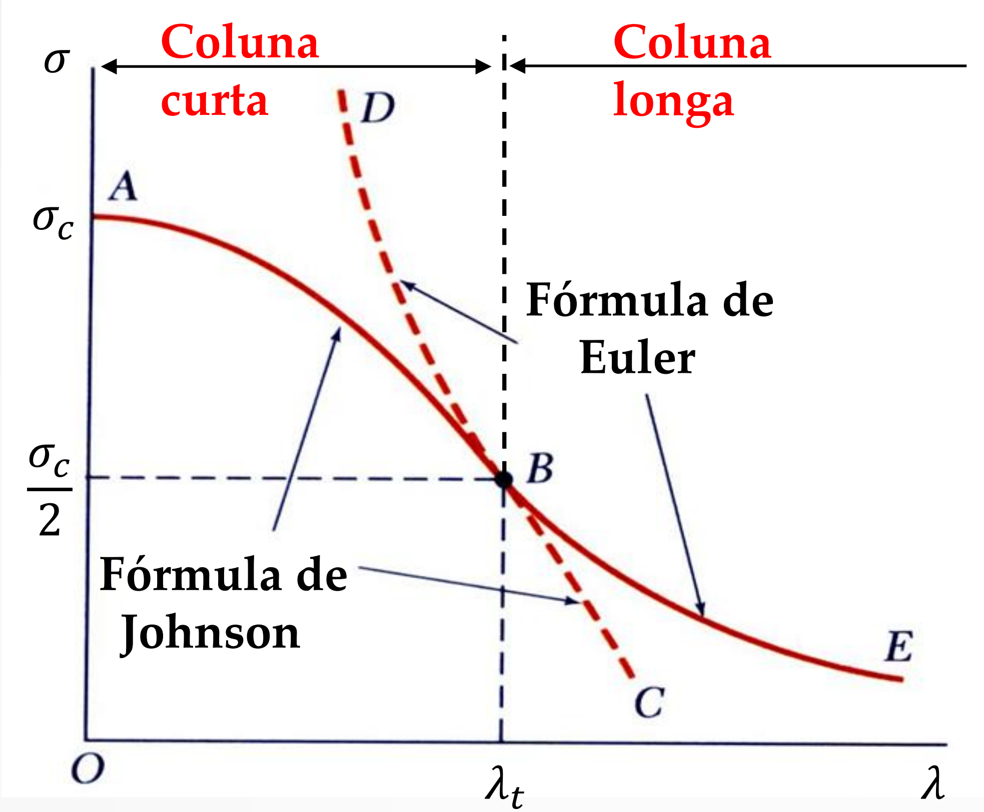


Fórmula de Johnson e Fórmula de Euler

A parábola de Johnson tem tangente nula no ponto A de abcissa nula, $(\lambda = 0, \sigma_{cr} = \sigma_c)$ e é tangente à expressão de Euler no ponto B: $(\lambda = \lambda_t, \sigma_{cr} = \frac{\sigma_c}{2})$

λ_t - Índice de esbeltez de transição também designada por C_c

$$\boxed{\lambda_t = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_c}}}$$



Tensão Crítica de Johnson

$\lambda \leq \lambda_t$

$$\boxed{\sigma_{cr} = \sigma_c\left(1 - \frac{\lambda_e^2}{2\lambda_t^2}\right)}$$

$$\sigma_{cr} = \sigma_c - \frac{\sigma_c^2}{4\pi^2 E}\lambda_e^2$$

Tensão Crítica de Euler

$\lambda > \lambda_t$

$$\boxed{\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_e^2}}$$

Metodologia de calculo da Carga Crítica

Dados: σ_c, E, L, geometria da secção e os 4 tipos de apoios.

1- Calcular a área A

2- **Para cada um dos dois eixos da secção**, calcular:

2.1- O momento de **inercia** I

2.2- O **raio de giração**, $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$

2.3- O **comprimento efetivo**, $L_e = KL$

2.4- O **índice de esbeltez**, $\lambda_e = \frac{L_e}{r}$

Escolher o maior λ_e dos dois eixos.

3- Calcular o **índice de esbeltez de transição**, $C_c = \lambda_t = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_c}}$

Metodologia de calculo da Carga Crítica

A American Institute of Steel Construction (AISC), determina por omissão um **coeficiente de segurança**, n.

4- Se $\lambda_e > \lambda_t$ - Fórmula de Euler:

Tensão Crítica, $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_e^2}$ e segundo AISC, o $n = 1{,}92$

5- Se $\lambda_e \leq \lambda_t$ - Fórmula de Johnson

Tensão Crítica, $\sigma_{cr} = \sigma_c \left(1 - \frac{\lambda_e^2}{2\lambda_t^2}\right)$ e $n = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{\lambda_e}{\lambda_t} - \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda_e}{\lambda_t}\right)^3$

6- Calcular a **Carga Crítica**,

- $P_{cr} = A\,\sigma_{cr}$
- Projeto: $\frac{P}{A} < \sigma_{adm} = \frac{\sigma_{cr}}{n} \quad \Rightarrow \quad P < P_{cr} = A\frac{\sigma_{cr}}{n}$